

О задаче размещения с дополнительными ограничениями на графах древесного вида

О. Ю. Цидулко¹

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Доклад основан на результатах из работ

- ▶ А.А. Агеев, Э.Х. Гимади, О.Ю. Цидулко, А.А. Штепа. *Задача размещения с ограничениями на объемы производства предприятий на графах древесного вида*// Тр. ИММ УрО РАН, 28:2, с. 24-44. 2022.
- ▶ Э.Х. Гимади, О.Ю. Цидулко. *О некоторых эффективно разрешимых классах сетевой задачи размещения с ограничениями на пропускные способности коммуникаций*// Тр. ИММ УрО РАН, 26:2, с. 108-124. 2020.

Сетевая задача размещения (Facility Location Problem)

Дано:

- ▶ граф $G(V, E)$, в вершинах $V_C \subseteq V$ которого находятся клиенты, $|V_C| = n$
- ▶ $V_F \subseteq V$, вершины, в которых находятся предприятия, $|V_F| = m$
- ▶ $\forall j \in V: b_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – спрос клиента в вершине j ;
- ▶ $\forall j \in V_F: f_j \in \mathbb{N}$ – стоимость открытия предприятия в вершине j ;
- ▶ $\forall e \in E: c_e \in \mathbb{N}$ – стоимость транспортировки единицы продукта вдоль e .

Пусть g_{ij} = стоимость кратчайшего пути из вершины i в j в графе G .

Сетевая задача размещения (Facility Location Problem)

Дано:

- ▶ граф $G(V, E)$, в вершинах $V_C \subseteq V$ которого находятся клиенты, $|V_C| = n$
- ▶ $V_F \subseteq V$, вершины, в которых находятся предприятия, $|V_F| = m$
- ▶ $\forall j \in V: b_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – спрос клиента в вершине j ;
- ▶ $\forall j \in V_F: f_j \in \mathbb{N}$ – стоимость открытия предприятия в вершине j ;
- ▶ $\forall e \in E: c_e \in \mathbb{N}$ – стоимость транспортировки единицы продукта вдоль e .

Пусть g_{ij} = стоимость кратчайшего пути из вершины i в j в графе G .

Требуется: открыть набор предприятий $S \subseteq V_F$, и определить объемы $\{x_{ij}\}$ поставляемые i -ым предприятием j -ому клиенту, т.ч.:

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in V_C} x_{ij} g_{ij} \rightarrow \min_{S, x_{ij}}$$

$$\sum_{i \in S} x_{ij} = b_j, j \in V_C \quad \text{и} \quad x_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Известные результаты для FLP

В произвольных графах задача NP-трудна [Bilde, Krarup, 1977], и остается NP-трудной даже на планарной решетке [Ageev, 1992]

Однако в графах древесного вида задача решается за время

$O(n)$ на цепях [Hassin, Tamir, 1991]

$O(n \log n)$ на деревьях [Shah, Farah-Colton, 2002]

$O(mn^{2.5})$ на внешнепланарных графах ($\text{treewidth} \leq 2$) [Gimadi, 2018]

$O(m^{k+1}n)$ на частичных k -деревьях ($\text{treewidth} \leq k$) [Ageev, 1992]

n — число клиентов, m — число возможных мест размещения предприятий.

Графы древесного вида



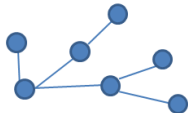
цепь (путь)



звезда



гусеница



дерево



2-дерево (treewidth=2)

- ▶ Часто в них сложные задачи хорошо решаются (например, дин.прог.), или наоборот, даже в них уже оказываются NP-трудными
- ▶ На практике: например, в энергетических сетях Western US power grid network (1998) $10 \leq \text{treewidth} \leq 18$.

Естественные обобщения задачи: CFLP и RFLP

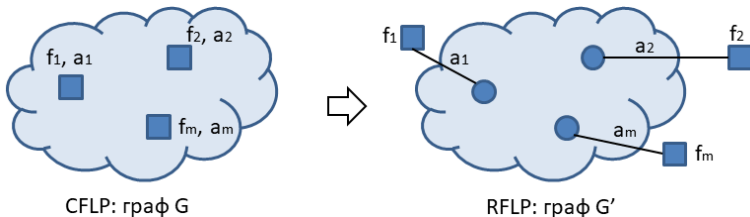
Capacitated Facility Location Problem (CFLP) – задача FLP, в которой для каждого предприятия $i \in V_F$ дополнительно задана мощность a_i , ограничивающая объем продукции, который оно может произвести.

Restricted Facility Location Problem (RFLP) – задача FLP, в которой для каждого ребра $e \in E$ дополнительно задана его пропускная способность q_e , ограничивающая объем продукции, который может быть передан по нему одновременно.

Естественные обобщения задачи: CFLP и RFLP

Capacitated Facility Location Problem (CFLP) – задача FLP, в которой для каждого предприятия $i \in V_F$ дополнительно задана мощность a_i , ограничивающая объем продукции, который оно может произвести.

Restricted Facility Location Problem (RFLP) – задача FLP, в которой для каждого ребра $e \in E$ дополнительно задана его пропускная способность q_e , ограничивающая объем продукции, который может быть передан по нему одновременно.



CFLP сводится к RFLP

RFLP: ограничение на пропускные способности ребер

RFLP с неделимыми спросами (спрос клиента должен быть обслужен только одним предприятием).

- ▶ **NP-трудна** на цепи и **NP-трудна в сильном смысле** уже на звезде, даже если транспортные затраты равны нулю, и стоимости открытия всех предприятий одинаковые.
- ▶ Близкая задача в литературе:
Unsplittable Flow Problem – даны граф, пропускные способности ребер, и m запросов: четверок вида $\{s_i, t_i, d_i, w_i\}$, означающих, что доход w_i будет получен за доставку неделимого продукта веса d_i из вершины s_i в t_i . Требуется выбрать подмножество запросов с максимальным суммарным доходом, которые можно удовлетворить одновременно.
NP-трудна даже в графе с двумя вершинами и двумя параллельными ребрами [Kleinberg, 1996]

RFLP: ограничение на пропускные способности ребер

RFLP с делимыми спросами (спрос клиента может быть обслужен несколькими предприятиями совместно)

- ▶ слабо NP-трудна на звезде, даже если транспортные затраты $\equiv 0$.
- ▶ псевдополиномиальные алгоритмы на дереве и 2-дереве [Voznuk, 1999, 2000]

RFLP: ограничение на пропускные способности ребер

RFLP с делимыми спросами (спрос клиента может быть обслужен несколькими предприятиями совместно)

- ▶ слабо NP-трудна на звезде, даже если транспортные затраты $\equiv 0$.
- ▶ псевдополиномиальные алгоритмы на дереве и 2-дереве [Voznuk, 1999, 2000]

[new] псевдополиномиальный алгоритм на частичном k -дереве, $k = \text{const}$

[new] $O(n + m)$ алгоритм на цепи

RFLP: ограничение на пропускные способности ребер

RFLP с делимыми спросами (спрос клиента может быть обслужен несколькими предприятиями совместно)

- ▶ слабо NP-трудна на звезде, даже если транспортные затраты $\equiv 0$.
- ▶ псевдополиномиальные алгоритмы на дереве и 2-дереве [Voznuk, 1999, 2000]

[new] псевдополиномиальный алгоритм на частичном k -дереве, $k = \text{const}$

[new] $O(n + m)$ алгоритм на цепи

- ▶ Близкие задачи в литературе:
Source Location Problem ($f_i \equiv 1$, $c_e \equiv 0$ и клиенты могут обслуживаться не одновременно);
Simultaneous Source Location (RFLP, где $f_i \equiv 1$, $c_e \equiv 0$) полиномиально разрешима на деревьях, но слабо NP-трудна на графах с $\text{treewidth} = 2$.

CFLP: ограничение на мощности предприятий

Если спросы клиентов $\neq 1$:

- ▶ **CFLP с неделимыми спросами** NP-трудна в сильном смысле даже на графе с одной вершиной, и даже если мощности предприятий одинаковы.

CFLP: ограничение на мощности предприятий

Если спросы клиентов $\neq 1$:

- ▶ **CFLP с неделимыми спросами** NP-трудна в сильном смысле даже на графе с одной вершиной, и даже если мощности предприятий одинаковы.
- ▶ **CFLP с делимыми спросами** NP-трудна даже на графе с одной вершиной, но решается за псевдополиномиальное время на частичных k -деревах при фикс. k (из результата для RFLP [Gimadi, Tsidulko, 2020])

CFLP: ограничение на мощности предприятий

Если спросы клиентов $\neq 1$:

- ▶ **CFLP с неделимыми спросами** NP-трудна в сильном смысле даже на графе с одной вершиной, и даже если мощности предприятий одинаковы.
- ▶ **CFLP с делимыми спросами** NP-трудна даже на графе с одной вершиной, но решается за псевдополиномиальное время на частичных k -деревьях при фикс. k (из результата для RFLP [Gimadi, Tsidulko, 2020])

UCFLP (делимые спросы и одинаковые мощности предприятий)

- ▶ на цепи – за $O(m^5 n^2 + m^3 n^3)$ [Ageev, 2004], $\dots$, $O(m^2 n^2)$ [Ageev et al, 2022].

CFLP: ограничение на мощности предприятий

Если спросы клиентов $\neq 1$:

- ▶ **CFLP с неделимыми спросами** NP-трудна в сильном смысле даже на графе с одной вершиной, и даже если мощности предприятий одинаковы.
- ▶ **CFLP с делимыми спросами** NP-трудна даже на графе с одной вершиной, но решается за псевдополиномиальное время на частичных k -деревьях при фикс. k (из результата для RFLP [Gimadi, Tsidulko, 2020])

UCFLP (делимые спросы и одинаковые мощности предприятий)

- ▶ на цепи – за $O(m^5 n^2 + m^3 n^3)$ [Ageev, 2004], ..., $O(m^2 n^2)$ [Ageev et al, 2022].

[new] на звезде – NP-трудна, если $V_C \cap V_F \neq \emptyset$

[new] на звезде – за $O(n + m)$, если $V_C \cap V_F = \emptyset$, но NP-трудна на деревьях

RFLP на частичных k-деревьях

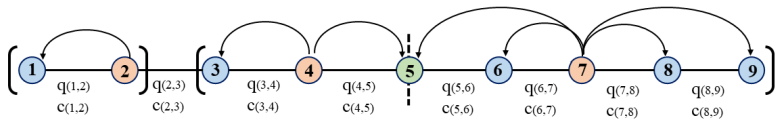
Теорема. RFLP с делимыми спросами на графах с древовидной шириной k (т.е. на частичных k -деревьях) решается за время $O(n \cdot k \cdot B^{2k})$, где величина $B = \min\{\sum_{j=1}^n b_j, \max_{e \in E(G)} q_e\}$.

Если $k = \text{const} \rightsquigarrow$ псевдополиномиальный алгоритм.

- ▶ Обобщение результата из [Andreev et al, 2009], где для задачи с $c_e \equiv 0$, $f_i \equiv 1$, был получен алгоритм с трудоемкостью $O(n^3 \cdot k \cdot B^{2k+2})$
- ▶ Подход: динамическое программирование по древовидному разложению графа
- ▶ Улучшение трудоемкости за счет более аккуратных вычислений в самом алгоритме и при оценке числа его операций

RFLP на цепи

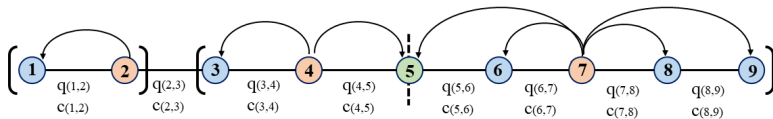
Теорема. RFLP с делимыми спросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.



1. Оптимальное решение разбивает цепь на отрезки обслуживания.

RFLP на цепи

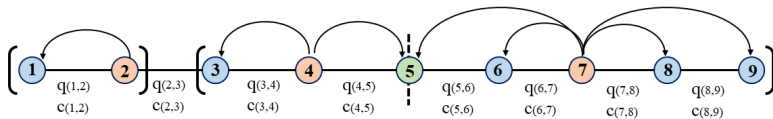
Теорема. RFLP с делимыми запросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.



1. Оптимальное решение разбивает цепь на отрезки обслуживания.
2. Для каждой вершины i найдем самую правую r_i и самую левую вершину ℓ_i , т.ч. i может полностью обслужить всех клиентов в $[\ell_i, r_i]$, и еще может доставить α_i и β_i продукции в $\ell_i - 1$ и $r_i + 1$.
Найти все величины $\ell_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$ можно за $O(n)$.

RFLP на цепи

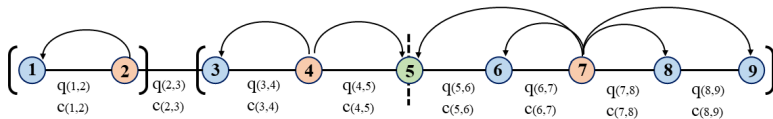
Теорема. RFLP с делимыми спросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.



1. Оптимальное решение разбивает цепь на отрезки обслуживания.
2. Для каждой вершины i найдем самую правую r_i и самую левую вершину ℓ_i , т.ч. i может полностью обслужить всех клиентов в $[\ell_i, r_i]$, и еще может доставить α_i и β_i продукции в $\ell_i - 1$ и $r_i + 1$.
Найти все величины $\ell_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$ можно за $O(n)$.
3. Предприятие из i в оптимальном решении обслуживает не полный спрос клиента $j \iff j \in \{\ell_i - 1, r_i + 1\}$. Пусть $j = \ell_i - 1$. Можно заменить j на 2 клиентов: со спросом $b_j - \alpha_i$ и α_i .
Суммарно за $O(n)$ проделаем такую операцию для всех клиентов, получим цепь с числом вершин $\leq 3n$.

RFLP на цепи

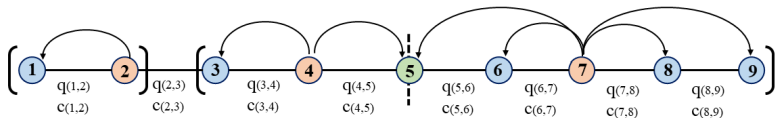
Теорема. RFLP с делимыми спросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.



1. Оптимальное решение разбивает цепь на отрезки обслуживания.
2. Для каждой вершины i найдем самую правую r_i и самую левую вершину ℓ_i , т.ч. i может полностью обслужить всех клиентов в $[\ell_i, r_i]$, и еще может доставить α_i и β_i продукции в $\ell_i - 1$ и $r_i + 1$.
Найти все величины $\ell_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$ можно за $O(n)$.
3. Предприятие из i в оптимальном решении обслуживает не полный спрос клиента $j \iff j \in \{\ell_i - 1, r_i + 1\}$. Пусть $j = \ell_i - 1$. Можно заменить j на 2 клиентов: со спросом $b_j - \alpha_i$ и α_i .
Суммарно за $O(n)$ проделаем такую операцию для всех клиентов, получим цепь с числом вершин $\leq 3n$.

RFLP на цепи

Теорема. RFLP с делимыми спросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.

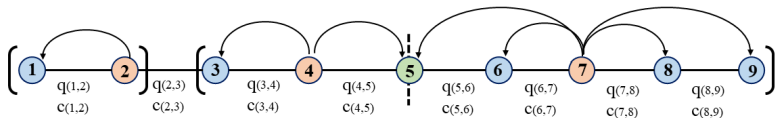


4. Введем величины

- ▶ $w(j, k)$ = сумм. транспорт. затраты на обслуживание всех клиентов в $(j, k]$ из предприятия в j , если $k \leq r_j$ и ∞ иначе.
- ▶ $\bar{w}(j, k)$ = сумм. транспорт. затраты на обслуживание всех в $[j, k)$ из k , если $j \geq r_k$ и ∞ иначе.

RFLP на цепи

Теорема. RFLP с делимыми спросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.



4. Введем величины

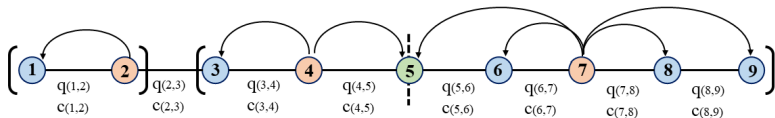
- ▶ $w(j, k)$ = сумм. транспорт. затраты на обслуживание всех клиентов в $(j, k]$ из предприятия в j , если $k \leq j$ и ∞ иначе.
- ▶ $\bar{w}(j, k)$ = сумм. транспорт. затраты на обслуживание всех в $[j, k)$ из k , если $j \geq r_k$ и ∞ иначе.

Тогда задача решается с помощью ДП (как и FLP [Hassin, Tamir, 1991]):

$$G(j) = f_j + \min_{j \leq k \leq n+1} \{w(j, k-1) + F(k)\} \quad F(j) = \min_{1 \leq k \leq n} \{\bar{w}(j, k) + G(k)\}$$

RFLP на цепи

Теорема. RFLP с делимыми спросами на цепи решается за $O(n)$,
 $n = |V| = |V_C|$.



4. Введем величины

- ▶ $w(j, k)$ = сумм. транспорт. затраты на обслуживание всех клиентов в $(j, k]$ из предприятия в j , если $k \leq r_j$ и ∞ иначе.
- ▶ $\bar{w}(j, k)$ = сумм. транспорт. затраты на обслуживание всех в $[j, k)$ из k , если $j \geq r_k$ и ∞ иначе.

Тогда задача решается с помощью ДП (как и FLP [Hassin, Tamir, 1991]):

$$G(j) = f_j + \min_{j \leq k \leq n+1} \{w(j, k-1) + F(k)\} \quad F(j) = \min_{1 \leq k \leq n} \{\bar{w}(j, k) + G(k)\}$$

5. [Wilber, 1988]: ДП такого вида можно вычислять за $O(n)$, если уметь находить $w(j, k)$ и $\bar{w}(j, k)$ за $O(1)$, и если $w(j, k)$ и $\bar{w}(j, k)$ обладают свойством вогнутости.

UCFLP (одинаковые мощности предприятий) на звезде

Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами, в которой в каждой вершине могут находиться и предприятие и клиент, **NP-трудна на звезде**.

- ▶ Подход: сведение от NP-трудной задачи о ранце

UCFLP (одинаковые мощности предприятий) на звезде

Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами, в которой в каждой вершине могут находиться и предприятие и клиент, **NP-трудна на звезде**.

- ▶ Подход: сведение от NP-трудной задачи о ранце

Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, **NP-трудна на деревьях**, и в частности на 2-пауках.

UCFLP (одинаковые мощности предприятий) на звезде

Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами, в которой в каждой вершине могут находиться и предприятие и клиент, **NP-трудна на звезде**.

- ▶ Подход: сведение от NP-трудной задачи о ранце

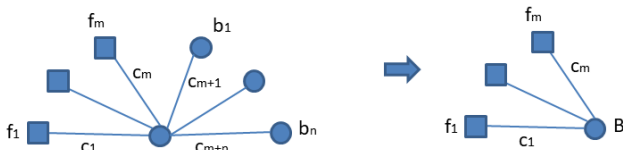
Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, **NP-трудна на деревьях**, и в частности на 2-пауках. Но на **звездах** решается за **линейное время**

UCFLP на звезде

Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами и одинаковыми мощностями предприятий, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, на звезде решается за $O(n + m)$

UCFLP на звезде

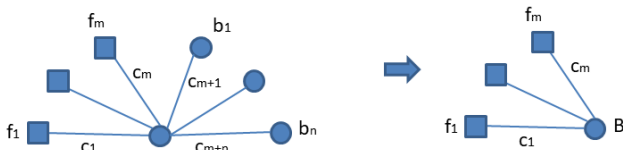
Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами и одинаковыми мощностями предприятий, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, на звезде решается за $O(n + m)$



1. Задача сводится к задаче с одним клиентом в центре со спросом $B = \sum_{i=1}^n b_i$

UCFLP на звезде

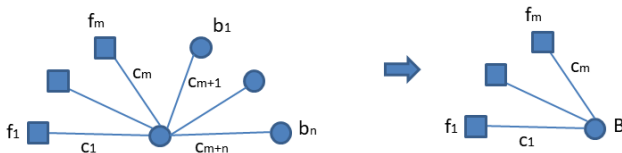
Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами и одинаковыми мощностями предприятий, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, на звезде решается за $O(n + m)$



1. Задача сводится к задаче с одним клиентом в центре со спросом $B = \sum_{i=1}^n b_i$
2. ≤ 1 открытое предприятие ненасыщено (поставляет $< a$ единиц продукции).

UCFLP на звезде

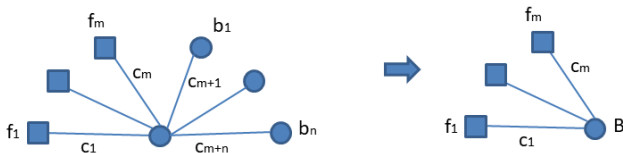
Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами и одинаковыми мощностями предприятий, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, на звезде решается за $O(n + m)$



1. Задача сводится к задаче с одним клиентом в центре со спросом $B = \sum_{i=1}^n b_i$
2. ≤ 1 открытое предприятие ненасыщено (поставляет $< a$ единиц продукции).
3. Пусть $k = \lceil B/a \rceil$. Найдем множество S из k предприятий с наименьшими значениями $h_i = f_i + c_i a$ за время $O(m)$:
 - ▶ В массиве $H = \{h_i \mid i = 1, \dots, m\}$ найдем k -ый по неубыванию элемент i_k за $O(m)$ [алгоритм 3.6 из Aho et al, 1974]; $S := \{i_k\}$
 - ▶ Внесем в S все i такие, что $h_i < h_{i_k}$, и затем, пока в S не наберется k элементов, добавим в S предприятия i , т.ч. $h_i = h_{i_k}$

UCFLP на звезде

Теорема. Задача UCFLP с делимыми спросами и одинаковыми мощностями предприятий, в которой в каждой вершине могут находиться либо предприятие, либо клиент, на звезде решается за $O(n + m)$



4. Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ построим решение S_i , в котором i -ое предприятие единственное ненасыщенное:

$$S_i = S, \text{ если } i \in S,$$

$$S_i = S \cup \{i\} \setminus \{i_k\}, \text{ если } i \notin S.$$

5. Ответ: лучшее из S_i .

Итог: известные результаты для RFLP

RFLP неделимыми запросами NP-трудна на пути, и NP-трудна в сильном смысле на деревьях, даже если транспортные затраты $c_e \equiv 0$.

RFLP с делимыми запросами

Граф G	$f_i \equiv f, c_e \equiv 0$	Общий случай
цепь	$O(n)$	$O(n)$ [GT, 2020]
звезда	$O(n)$	NP-тр. [GT, 2020]
дерево	$O(n)$ [Turner et al, 2015]	NP-тр.
$tw = 2$	NP-тр. [Andreev et al, 2009]	NP-тр.
$tw = O(1)$	$O(nB^{2^{tw}})$ [GT, 2020]	

n – число вершин в графе (считаем, что в каждой вершине есть клиент)

$$B = \min\{\sum_j^n b_j, \max_{e \in E} q_e\}$$

Итог: известные результаты для CFLP и UCFLP

CFLP с неделимыми спросами NP-трудна в сильном смысле даже на графе с одной вершиной, даже если мощности всех предприятий $a_i \equiv a$.

CFLP с делимыми спросами

Граф G	UCFLP ($a_i \equiv a$)		CFLP(общий случай)
1 вершина	$O(n + m)$	trivial	NP-тр.
цепь	$O(n^2 m^2)$	[AGS, 2022]	NP-тр., $O(nB)$ [GTS19]
звезда, $V_C \cap V_F = \emptyset$	$O(n + m)$	[AGTS, 2022]	NP-тр.
звезда, $V_C \cap V_F \neq \emptyset$	NP-тр.	[AGTS, 2022]	NP-тр.
дерево ($\text{pw} \geq 2$)	NP-тр.	[AGTS, 2022]	NP-тр.
$\text{tw} = O(1)$		$O((n + m)B^{2\text{tw}})$ [GT, 2020]	

Здесь $V = V_C \cup V_F$, $|V_C| = n$, $|V_F| = m$,

$$B = \min\{\sum_{j \in V_C} b_j, \max_{i \in V_F} a_i\}$$

Открытые вопросы для задач FLP в древовидных графах

RFLP с неделимыми запросами: Известно, что на цепи задача NP-трудна. Есть ли в этом случае псевдополиномиальный алгоритм?

UCFLP с делимыми запросами, где клиенты и предприятия в разных вершинах: Известны полиномиальные алгоритмы на цепи и на звезде. Есть ли полиномиальный алгоритм на дереве-гусенице?

FLP: решается за время $O(n^{tw+2})$ [Ageev,1994], где tw – древовидная ширина графа (treewidth). Есть ли алгоритм с трудоемкостью $f(tw) \cdot n^{O(1)}$?

p-level FLP: решается за $O(n^3 pm)$ на цепи [Gimadi,1995], за $O(nm^{2p})$ на дереве при $p=2,3$ [Gimadi et al, 2014, 2020]. Есть ли полиномиальный алгоритм на дереве при неограниченном p ?

Открытые вопросы для задач FLP в древовидных графах

RFLP с неделимыми спросами: Известно, что на цепи задача NP-трудна. Есть ли в этом случае псевдополиномиальный алгоритм? (скорее нет)

UCFLP с делимыми спросами, где клиенты и предприятия в разных вершинах: Известны полиномиальные алгоритмы на цепи и на звезде. Есть ли полиномиальный алгоритм на дереве-гусенице? (скорее есть)

FLP: решается за время $O(n^{tw+2})$ [Ageev,1994], где tw – древовидная ширина графа (treewidth). Есть ли алгоритм с трудоемкостью $f(tw) \cdot n^{O(1)}$? (скорее нет даже для pathwidth)

p-level FLP: решается за $O(n^3 pm)$ на цепи [Gimadi,1995], за $O(nm^{2p})$ на дереве при $p=2,3$ [Gimadi et al, 2014, 2020]. Есть ли полиномиальный алгоритм на дереве при неограниченном p ? (скорее нет)

Спасибо за внимание!

ILP for CFLP

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in S} x_{ij} = b_j, \quad j \in J, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in I, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i \in I, j \in J, \quad (4)$$

ILP for RFLP

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{i, j \in V} \sum_{p \in P_{ij}} g_{ij}^p x_{ij}^p \rightarrow \min_{S, x_{ij}^p} \quad (5)$$

при условиях:

$$\sum_{i \in S} \sum_{p \in P_{ij}} x_{ij}^p = b_j, \quad j \in V, \quad (6)$$

$$\sum_{(i, j, p) \in Q_e} x_{ij}^p \leq q(e), \quad e \in E, \quad (7)$$

$$x_{ij}^p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i \in S, j \in V, p \in P_{ij}, \quad (8)$$

где x_{ij}^p — объем продукта, поставленного предприятием $i \in S$ в вершину $j \in V$ по пути p ; $g_{ij}^p = \sum_{e \in p} c(e)$ — стоимость транспортировки единицы продукта по пути p ; P_{ij} — множество всех простых путей в графе G , ведущих из вершины i в вершину j ; Q_e — множество троек (i, j, p) таких, что путь $p \in P_{ij}$ проходит через ребро e .

UCFLP на звезде. Сведение

Задача о рюкзаке: даны n предметов, их размеры $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, стоимости $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и величины $F, A \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Существует ли подмножество $S \subseteq \{1, \dots, n\}$: $\sum_{i \in S} f_i \leq F$ и $\sum_{i \in S} a_i \geq A$.

UCFLP на звезде: мощности всех предприятий $a = \max a_i + 1$; $\gamma = 2 \sum_{i=1}^n f_i$, бюджет решения $F' = F + \sum_{i=1}^n f_i + 3\gamma \cdot \sum_{i=1}^n a_i + \gamma \cdot A$.

