О свойствах одного класса случайных операторов.

Н.В.Смородина
(совместно с И.А.Ибрагимовым и М.М.Фаддеевым)

ПОМИ РАН, СПбГУ (физический ф-т).

7 ноября, 2022

Пусть $\xi_x(t), \quad t \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}$ – решение СДУ

$$d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t), \qquad \xi_x(0) = x,$$

где $w(t)$, $t \geqslant 0$ – стандартный винеровский процесс.
1. Функция b непрерывна и ограничена вместе со своими двумя первыми производными.
2. $\theta_0 = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$.
3. Существует $b_0 > 0$ такое что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$.
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$.
5. $\int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot |b(x) - b_0|\,dx < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot |b'(x)|\,dx < \infty$.
Изменяя масштаб времени, можем сделать $b_0 = 1$.

Пусть $V(x)$ – непрерывная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$V(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0, \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|^2 \, |V(x)| \, dx < \infty.$$

Обозначим

$$v_0 = -\inf_{y\in\mathbb{R}} V(y) \geqslant 0.$$

Семейство процессов $\xi_x(t)$, $x \in \mathbb{R}$ порождает полугруппу ограниченных операторов

$$P^t : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),$$

где $C(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ с равномерной нормой, а оператор P^t определяется формулой

$$P^t f(x) = \mathbb{E} f(\xi_x(t)) e^{-\int_0^t V(\xi_x(s))\, ds}.$$

Далее, пусть $f \in C(\mathbb{R})$. Определим функцию $u(t,x)$, полагая

$$u(t,x) = \mathbb{E} f(\xi_x(t)) e^{-\int_0^t V(\xi_x(s))\, ds}.$$

Функция $u(t,x)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(b^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - V(x)u,$$

и начальному условию

$$u(0,x) = \lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x).$$

Мы будем брать в качестве начальной функции в произвольную функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Утверждение может быть сформулировано в терминах функций от операторов. Именно, рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A}_0$, определенный на множестве $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = W_2^2(\mathbb{R})$ и действующий на функцию $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ как

$$\mathcal{A}_0 f(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big(b^2(x)\frac{df}{dx}\Big).$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим самосопряженный оператор, заданный на $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R})$ и действующий на f как

$$\mathcal{A} f(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big(b^2(x)\frac{df}{dx}\Big) + V(x)f(x).$$

Уравнение означает, что справедливо операторное равенство

$$P^t = e^{-t\mathcal{A}}.$$

Мы введем случайные процессы, дающие возможность строить аналогичное вероятностное представление, но не для экспоненты, а для резольвенты оператора $\mathcal{A}$.

Будут построены семейства случайных функций $r_\lambda(x,y)$, $r_\lambda(t,x,y)$ удовлетворяющие условиям
1.$r_\lambda(x,\cdot), r_\lambda(t,x,\cdot) \in W_2^\alpha$ для всех $\alpha \in [0,1/2)$ п.н.
2. Для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}f$$

или

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}f$$

Случайные функции $r_\lambda(x,y)$, $r_\lambda(t,x,y)$ будут определены как ядра некоторых случайных операторов.

Оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + V(x)$ является относительно компактным возмущением оператора $\mathcal{A}_0$. Отсюда следует, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}$. Из условий на $V(x)$ также вытекает, что вне $[0, \infty)$ у оператора $\mathcal{A}$ может появиться только конечное число однократных собственных значений. Обозначим эти собственные значения через

$$-k_1^2/2 < -k_2^2/2 < \cdots < -k_N^2/2,$$

а отвечающие им собственные функции через

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N.$$

Функции φ_j принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и являются при каждом $j = 1, \ldots, N$ решениями уравнения

$$\mathcal{A}\varphi_j(x) = -\frac{k_j^2}{2}\,\varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Пусть H_{ac} – абсолютно непрерывное подпространство оператора $\mathcal{A}$, $\varphi(x,k)$ – собственные функции непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$. При каждом $k \in \mathbb{R}$ они являются решениями

$$\mathcal{A}\varphi(x,k) = \frac{k^2}{2}\varphi(x,k)$$

и в смысле обобщенных функций удовлетворяют соотношениям

$$\int \varphi(x,k)\overline{\varphi(x,k')}\,dx = \delta(k-k')$$

и

$$\int \varphi(x,k)\overline{\varphi(x',k)}\,dk = t(x,x'),$$

где δ – дельта-функция Дирака, а $t(x,x')$ – ядро ортогонального проектора P_{ac} на H_{ac}.
Осуществим выбор таким образом, чтобы семейство $\varphi(x,k)$ допускало аналитическое продолжение по k в верхнюю полуплоскость и такое, что при $\mathrm{Im}\,k > 0$ функция $\varphi(x,k) \to 0$ экспоненциально быстро при $x \to +\infty$

Функции $\varphi(x,k)$ задают ядро изометрического оператора $\Psi : \mathrm{H}_{ac} \to L_2(\mathbb{R})$, сплетающего оператор $\mathcal{A}$ и оператор умножения на $\frac{k^2}{2}$. Именно, введем изометрический оператор

$$\Psi : f(x) \mapsto (L_2) \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f(x)\overline{\varphi(x,k)}\, dx = (\Psi f)(k),$$

$$\Psi^* : g(k) \mapsto (L_2) \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} g(k)\varphi(x,k)\, dk = (\Psi^* g)(x).$$

Справедливы соотношения

$$\Psi^*\Psi = \mathrm{P}_{ac}, \quad \Psi\Psi^* = I \quad \text{(тождественное отображение)}.$$

Оператор Ψ сплетает оператор $\mathcal{A}$ и оператор умножения на $\frac{k^2}{2}$, что означает, что равенство $\mathcal{A}f = h$ эквивалентно равенству

$$\frac{k^2}{2}(\Psi f)(k) = (\Psi h)(k).$$

Сплетающий оператор позволяет эффективно строить функции от оператора, в том смысле, что для всякой борелевской функции F равенство $F(\mathcal{A})f = h$ эквивалентно равенству $F(\frac{k^2}{2})(\Psi f)(k) = (\Psi h)(k)$ и, соответственно,

$$\mathcal{D}(F(\mathcal{A})) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : F\Big(\frac{k^2}{2}\Big)(\Psi f)(k) \in L_2(\mathbb{R})\}. \qquad (1)$$

для любых $t \geqslant 0$, $k, x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathbb{E}\varphi(\xi_x(t), k)e^{-\int_0^t V(\xi_x(s))\,ds} = e^{-\frac{k^2 t}{2}}\varphi(x, k).$$

Lemma

Существует константа $L > 0$ такая, что для любых $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{R}$ справедливо

$$|\varphi(x, k)| \leqslant L.$$

Lemma

Функции $\varphi(x, k)$ не обращаются в ноль в области $\operatorname{Im} k > 0$.

Lemma

Пусть функция g для некоторого $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |k|^{2\alpha})|g(k)|^2\,dk < \infty.$$

Тогда $\Psi^* g \in W_2^{\alpha}(\mathbb{R})$.

Пусть $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$. Определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$.
Пусть $a = \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$. В этом случае, положим

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau} (\mathrm{P}_{\mathrm{ac}} f)(\xi_x(\tau)) e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\, d\tau.$$

Правая часть корректно определена для всех непрерывных ограниченных f, далее мы покажем, что с вероятностью единица оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ продолжается до ограниченного оператора в $L_2(\mathbb{R})$ и найдем его ядро.
Первым шагом мы получим формальное (в виде обобщенной функции) выражение для ядра $\mathcal{R}_\lambda^t$, а потом покажем, что с вероятностью единица $\mathcal{R}_\lambda^t$ является интегральным оператором, а полученное формальное выражение действительно является его ядром.

Пользуясь тождеством

$$\mathrm{P}_{ac} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) t(x,y)\, dy,$$

получаем

$$\int_0^t e^{\lambda\tau} (\mathrm{P}_{\mathrm{ac}} f)(\xi_x(\tau)) e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\, ds}\, d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_0^t e^{\lambda\tau} t(\xi_x(\tau), y) e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\, ds}\, d\tau\, dy.$$

Последняя формула показывает, что ядро $r_\lambda(t,x,y)$ оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$, если оно существует, должно иметь вид

$$r_\lambda(t,x,y) = \int_0^t e^{\lambda\tau}\, t(\xi_x(\tau), y) e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\, ds}\, d\tau.$$

Вычислим $\Psi-$преобразование функции $r_\lambda(t,x,y)$ по переменной y.

$$t(\xi_x(\tau),y)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi_x(\tau),k)\overline{\varphi(y,k)}\,dk.$$

После некоторых вычислений получаем

$$\overline{(\Psi\overline{r_\lambda})(t,x,k)}=\int_0^t\varphi(\xi_x(\tau),k)e^{\lambda\tau}e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau.$$

Придадим формальным вычислениям строгий смысл. Для этого введем сначала пространство $\mathcal{H}_\alpha$, состоящее из $L_2(\mathbb{R})$-значных случайных величин $f(x)=f(x,\omega)$ вида $f=\Psi^*g$ с нормой

$$\|f\|_\alpha^2=\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}}(1+|k|^{2\alpha})|g(k)|^2\,dk.$$

Theorem

1. Для любого $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел*

$$\overline{r_\lambda(t, x, \cdot)} = (\mathcal{H}_\alpha) \lim_{M \to \infty} \overline{r_\lambda^M(t, x, \cdot)},$$

где

$$\overline{r_\lambda^M(t, x, \cdot)} = \Psi^* \overline{h_\lambda^M(t, x, \cdot)},$$

а функция $h_\lambda^M(t, x, k)$ *определяется как*

$$h_\lambda^M(t, x, k) = \overline{(\Psi \overline{r_\lambda})(t, x, k)} \cdot \mathbf{1}_{[-M, M]}(k).$$

2. Если $a + v_0 = \mathrm{Re}\,\lambda + v_0 < 0$ *то для любого* $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел*

$$\overline{r_\lambda(\infty, x, \cdot)} = (\mathcal{H}_\alpha) \lim_{t \to \infty} \overline{r_\lambda(t, x, \cdot)}.$$

Theorem

Для любого фиксированного $0 \leqslant t < \infty$ с вероятностью единица оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau} (\mathrm{P}_{\mathrm{ac}} f)(\xi_x(\tau)) e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\, d\tau.$$

$$\sigma(\mathcal{A}_{ac}) = \sigma_{ac}(\mathcal{A}) = [0, \infty),$$

Theorem

1. Пусть $a + v_0 < 0$*. Тогда для любого* $f \in \mathrm{H}_{ac}$ *справедливо*

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty, x, y) f(y)\, dy = (\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1} f(x).$$

2. Пусть $a + v_0 \geqslant 0$ *и* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{ac})$*. Тогда для любого* $f \in \mathrm{H}_{ac}$ *справедливо*

$$(L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t, x, y) f(y)\, dy = (\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1} f(x). \qquad (2)$$

3. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{ac})$*. Тогда для любого* $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1}$ *справедливо (2).*