

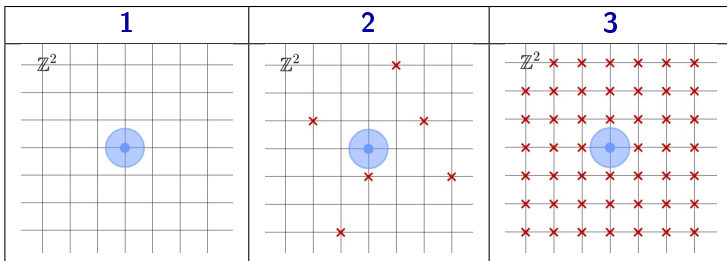
Ветвящиеся случайные блуждания с одним центром генерации частиц и бесконечным числом поглощающих источников

Филичкина Елена
elena.filichkina1999@yandex.ru

кафедра теории вероятностей,
механико-математический факультет
МГУ имени М. В. Ломоносова

7 ноября 2022

История вопроса и неформальная постановка задачи



1. ВСБ без поглощающих источников

Е. Б. Яровая, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, 2007 [4]

2. ВСБ с конечным числом поглощающих источников

Е. Yarovaya, D. Balashova, I. Khristolyubov, "Branching Walks with a Finite Set of Branching Sources and Pseudo-sources", 2021 [5]

3. ВСБ с бесконечным числом поглощающих источников

Формальное описание модели. Случайное блуждание

Случайное блуждание задается с помощью матрицы переходных интенсивностей $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$.

Переходная вероятность случайного блуждания — $p(t, x, y)$.

При $h \rightarrow 0$:

$$p(h, x, y) = a(x, y)h + o(h), \quad x \neq y,$$

$$p(h, x, x) = 1 + a(x, x)h + o(h).$$

Формальное описание модели. Случайное блуждание. Функция Грина

Функция Грина — преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$:

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt, \lambda \geq 0.$$

Будем называть случайное блуждание *возвратным*, если $G_0(0, 0) = \infty$, и *невозвратным*, если $G_0(0, 0) < \infty$.

Формальное описание модели. Ветвление

Процесс ветвления задается с помощью инфинитезимальной производящей функции

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, 0 \leq u \leq 1,$$

где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$.

Для поглощающего источника производящая функция имеет вид

$$\bar{f}(u) = b_0 + \bar{b}_1 u = b_0 - b_0 u = b_0(1 - u),$$

$b_0 > 0$ — интенсивность гибели, или поглощения, частицы.

Совмещение механизмов блуждания и ветвления

Эволюция частиц в системе происходит следующим образом: частица, находящаяся в некоторый момент времени $t > 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, за малое время $dt \rightarrow 0$ может:

- 1) совершить скачок в точку $y \neq x, y \in \mathbb{Z}^d$, с вероятностью $a(x, y)dt + o(dt)$,
- 2) погибнуть с вероятностью $b_0 dt + o(dt)$,
- 3) произвести $n > 1$ потомков, включая себя, с вероятностью $b_n dt + o(dt)$ (если точка x является центром генерации частиц),
- 4) остаться в точке x в течение всего промежутка времени $[t, t + dt]$ с вероятностью $1 + a(x, x)dt + \delta_0(x)b_1 dt + (1 - \delta_0(x))(-b_0 dt) + o(dt)$.

Основные объекты исследования

Обозначим через $\mu(t, y)$ численность частиц в момент времени $t \geq 0$ в точке $y \in \mathbb{Z}^d$.

Общее число частиц определяется как $\mu(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu(t, y)$.

$$m_n(t, x, y) := E_x \mu^n(t, y), \quad m_n(t, x) := E_x \mu^n(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В начальный момент времени система состоит из одной частицы, расположенной в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, начальные условия: $m_n(0, x, y) = \delta_y(x)$ и $m_n(0, x) \equiv 1$.

Первые моменты

ВСБ без поглощающих источников [4]	ВСБ с возможным поглощением в каждой точке
$\frac{dm_1}{dt} = \mathcal{H}m_1$ $\mathcal{H} := \mathcal{A} + \beta\Delta_0$ $\beta := \sum_{n>0} nb_n$	$\frac{dm_1}{dt} = \mathcal{E}m_1$ $\mathcal{E} := \mathcal{A} + \beta^*\Delta_0 - b_0\mathcal{I}$ $\beta^* := \sum_{n>1} (n-1)b_n$

$\mathcal{A} : l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — оператор блуждания, действующий по формуле $\mathcal{A}\psi(x) = \sum_{x'} a(x, x')\psi(x)$,

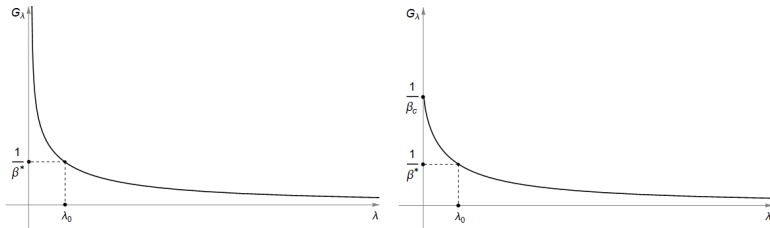
$\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$, $\delta_x = \delta_x(\cdot)$ — вектор-столбец на решетке, принимающий ненулевое (единичное) значение только в точке $x \in \mathbb{Z}^d$,

$\mathcal{I}$ — единичный оператор.

Критическое значение β_c

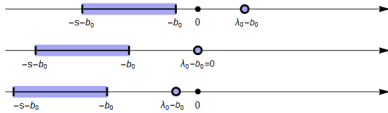
Обозначим $\beta_c := 1/G_0(0, 0)$.

При $\beta^* > \beta_c$ у оператора $\mathcal{A} + \beta^* \Delta_0$ имеется единственное положительное собственное значение λ_0 , которое определяется уравнением $\beta^* G_\lambda(0, 0) = 1$ (см. [4]).



Функция Грина для возвратного (слева) и невозвратного (справа) случайного блуждания.

Спектр оператора, описывающего эволюцию средних численностей частиц

ВСБ без поглощающих источников [4]	ВСБ с возможным поглощением в каждой точке
$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \beta \Delta_0$ $\beta > \beta_c :$ 	$\mathcal{E} = \mathcal{A} + \beta^* \Delta_0 - b_0 \mathcal{I}$ $\beta^* > \beta_c :$ 

Первые моменты

ВСБ без поглощающих источников [4]

$$m_1(t, x, y) \sim C(x, y)u(t) \quad m_1(t, x) \sim C(x)v(t)$$

$$\beta > \beta_c : \quad u(t) = e^{\lambda_0 t}, \quad v(t) = e^{\lambda_0 t}$$

$$\beta \leq \beta_c : \quad u(t) = t^\alpha (\ln t)^\beta, \quad v(t) = t^{\alpha'} (\ln t)^{\beta'}$$

ВСБ с возможным поглощением в каждой точке

С помощью замены переменных $m_1 = qe^{-b_0 t}$ уравнение для первых моментов сводится к уравнению такого же вида, что и в [4].

$$\beta^* > \beta_c : \quad u^*(t) = e^{(\lambda_0 - b_0)t}, \quad v^*(t) = e^{(\lambda_0 - b_0)t}$$

$$\beta^* \leq \beta_c : \quad u^*(t) = t^\alpha (\ln t)^\beta e^{-b_0 t}, \quad v^*(t) = t^{\alpha'} (\ln t)^{\beta'} e^{-b_0 t}$$

Ветвящийся процесс [1]

$m_1(t) = e^{at}$. Ветвящийся процесс называется *надкритическим*, если $m_1(t) > 1$ ($a > 0$), *критическим*, если $m_1(t) = 1$ ($a = 0$), и *докритическим*, если $m_1(t) < 1$ ($a < 0$).

Случай $\beta^* > \beta_c$ и $\lambda_0 > b_0$ (надкритическое ВСБ)

Теорема

Пусть $\beta^* > \beta_c$ и $\lambda_0 > b_0$. Если $\beta^{(r)} := f^{(r)}(1) = O(r!r^{r-1})$ для всех $r \in \mathbb{N}$, то в смысле сходимости по распределению справедливы соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t, y) e^{-(\lambda_0 - b_0)t} = \xi \psi(y),$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) e^{-(\lambda_0 - b_0)t} = \xi,$$

где $\psi(y)$ — некоторая неотрицательная функция, а ξ — невырожденная случайная величина.

Случай $\beta^* > \beta_c$ и $\lambda_0 = b_0$ (критическое ВСБ)

Теорема

Пусть $\beta^* > \beta_c$ и $\lambda_0 = b_0$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $t \rightarrow \infty$ имеют место предельные соотношения

$$m_n(t, x, y) \sim J_n(x, y)t^{n-1},$$

$$m_n(t, x) \sim J_n(x)t^{n-1},$$

где $J_n(x, y), J_n(x)$ — некоторые константы.

Случай $\beta^* > \beta_c$ и $\lambda_0 < b_0$ (докритическое ВСБ)

Теорема

Пусть $\beta^* > \beta_c$ и $\lambda_0 < b_0$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $t \rightarrow \infty$ имеют место предельные соотношения

$$m_n(t, x, y) \sim D_n(x, y)e^{-(b_0 - \lambda_0)t},$$

$$m_n(t, x) \sim D_n(x)e^{-(b_0 - \lambda_0)t},$$

где $D_n(x, y), D_n(x)$ — некоторые константы.

Случай $\beta^* = \beta_c$ (докритическое ВСБ)

Теорема

Пусть дисперсия скачков случайного блуждания конечна, тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ и $t \rightarrow \infty$ имеют место предельные соотношения

а) при $\beta^* = \beta_c$

$$m_n(t, x, y) \sim A_{n,d}(x, y) t^{\alpha_1} (\ln t)^{\beta_1} e^{-b_0 t},$$

$$m_n(t, x) \sim A_{n,d}(x) t^{\alpha_2} (\ln t)^{\beta_2} e^{-b_0 t},$$

где $A_{n,d}(x, y)$, $A_{n,d}(x)$ — некоторые константы и

$$d = 3: \quad \alpha_1 = -1/2, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1/2, \quad \beta_2 = 0,$$

$$d = 4: \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = -1,$$

$$d \geq 5: \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 0.$$

Случай $\beta^* < \beta_c$ (докритическое ВСБ)

Теорема

b) при $\beta^ < \beta_c$ и $d \geq 3$*

$$m_n(t, x, y) \sim B_n(x, y) t^{-d/2} e^{-b_0 t},$$

$$m_n(t, x) \sim B_n(x) e^{-b_0 t},$$

где $B_n(x, y)$, $B_n(x)$ — некоторые константы.

Спасибо за внимание!

-  Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436с.
-  *S. Albeverio, L. V. Bogachev, and Elena B. Yarovaya*, Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 326(8):975–980, 1998. ISSN 0764-4442, [https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(98\)80125-0](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(98)80125-0).
-  *Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая*, Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. // Докл. РАН. – 1998, т. 363, №4. с. 439-442.
-  *Е. Б. Яровая*, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007
-  *E. Yarovaya, D. Balashova, I. Khristolyubov*, “Branching Walks with a Finite Set of Branching Sources and Pseudo-sources”, Recent Developments in Stochastic Methods and Applications

pp 144-163 (2021),
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-83266-7-11>.



И. И. Христюков, Е. Б. Яровая, “Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности”, Теория вероятн. и ее примен., 64:3 (2019), 456–480; Theory Probab. Appl., 64:3 (2019), 365–384, <https://doi.org/10.4213/tvp5245>.