Свойства выпуклых оболочек случайных блужданий

Мыслюк Александр Олегович
sanya.mysliuk@mail.ru

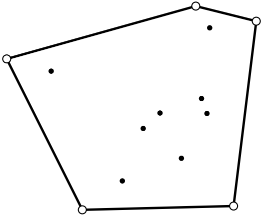
МГУ имени М. В. Ломоносова

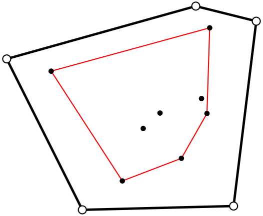
8 ноября, 2022

План доклада

1. История вопроса
2. Комбинаторная лемма Бакстера и её обобщение
3. Основные результаты

Случай выпуклой оболочки случайно распределённых точек





Случай выпуклой оболочки случайно распределённых точек

Теорема. (A. Renyi, R. Sulunke, 1963)
Пусть K — выпуклый многоугольник с r вершинами $A_1, \ldots, A_r$. Точки $P_1, \ldots, P_n$ равномерно распределены на K. Пусть C_n — выпуклая оболочка этих точек, E_n — математическое ожидание числа вершин границы C_n. Тогда верно следующее равенство

$$E_n = \frac{2r}{3}(\ln n + C) + \frac{2}{3}\ln\prod_{i=1}^{r}\frac{f_i}{F} + o(1), n \to \infty,$$

где $C \approx 0,5772$ — константа Эйлера, f_i — площадь треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, а F – площадь K.

Случай выпуклой оболочки случайно распределённых точек

Теорема. (A. Renyi, R. Sulunke, 1963)
Пусть K – выпуклая область с гладкой границей L с кривизной κ. Тогда

$$E_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (F^{-\frac{1}{3}} \int\limits_L \kappa(s) ds) \cdot n^{\frac{1}{3}}, n \to \infty,$$

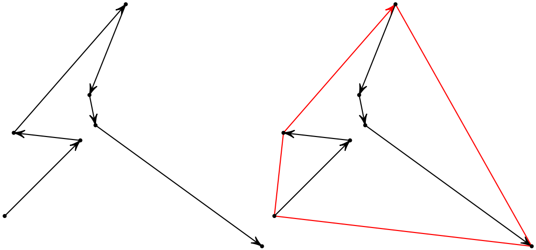
где F – площадь K.

Теорема. (A. Renyi, R. Sulunke, 1963)
Пусть точки $P_1, \ldots, P_n$ распределены на плоскости по стандартному нормальному закону, тогда

$$E_n \sim 2\sqrt{2\pi \ln n}, n \to \infty.$$

Случай случайного блуждания в $\mathbb{R}^d$

Рассматривается случайное блуждание в $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ с дискретным временем. Так же, как и раньше, через C_n будет обозначаться выпуклая оболочка точек случайного блуждания, через H_n – граница выпуклой оболочки, через E_n – математическое ожидание числа $(d-1)$-мерных граней H_n.



Случай случайного блуждания в $\mathbb{R}^2$

Пусть $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ — набор комлпексных чисел. A — некоторый поднабор индексов $\{i_1, \dots, i_k\}$, σ_A — некоторая перестановка индексов A. Введём обозначения

$$Z_A := Z_{i_1} + \dots + Z_{i_k}$$

$$S_l(\sigma_A) := Z_{\sigma_A(i_1)} + \dots + Z_{\sigma_A(i_l)}.$$

Определение 1. Набор комплексных чисел $\{Z_n\}$ будем называть системой *skew vectors* (**SV**), если из того, что Z_A параллелен Z_B следует, что $A = B$.

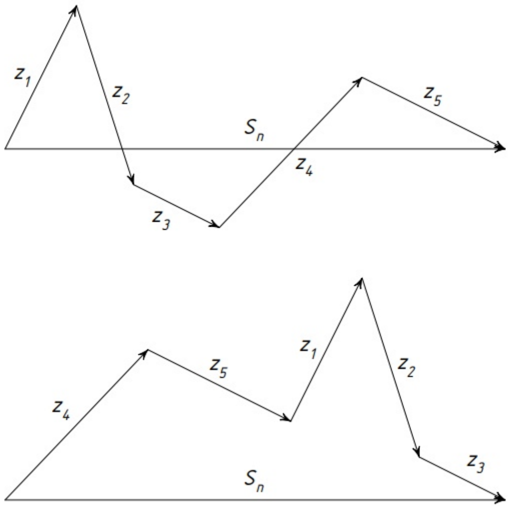
Комбинаторная лемма (G. Baxter, 1961)

Лемма. Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ — набор комлексных чисел, являющейся системой *skew vectors*. Тогда существует единственная циклическая перестановка $\sigma = \{i_1, \ldots, i_n\}$, такая что точки
$S_1(\sigma) = Z_{\sigma(1)}$
$S_2(\sigma) = S_1(\sigma) + Z_{\sigma(2)}$
...
$S_{n-1}(\sigma) = S_{n-2}(\sigma) + Z_{\sigma(n-1)}$
лежат в левой (правой) полуплоскости относительно прямой, проходящей через $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Теорема 1. (G. Baxter, 1961) Если скачки Z_i случайного блуждания почти наверное удовлетворяют определению 1 (SV), то

$$E_n \sim 2 \ln n, n \to \infty.$$

Комбинаторная лемма (G. Baxter, 1961)



Случай случайного блуждания в $\mathbb{R}^d$

Определение 2. Будем говорить, что скачки удовлетворяют условию Запорожца-Высотского (**H**), если

$$P(Z_i \in h) = 0$$

для всякой гиперплоскости h.

Теорема 2. (Запорожец-Высотский, 2018) Если скачки Z_i случайного блуждания удовлетворяют определению 2 (H), то

$$E_n \sim 2(\ln n)^{d-1}, n \to \infty$$

Обобщение комбинаторной леммы

Введём обобщение системы *skew vectors* для случая произвольного $d-$мерного пространста.

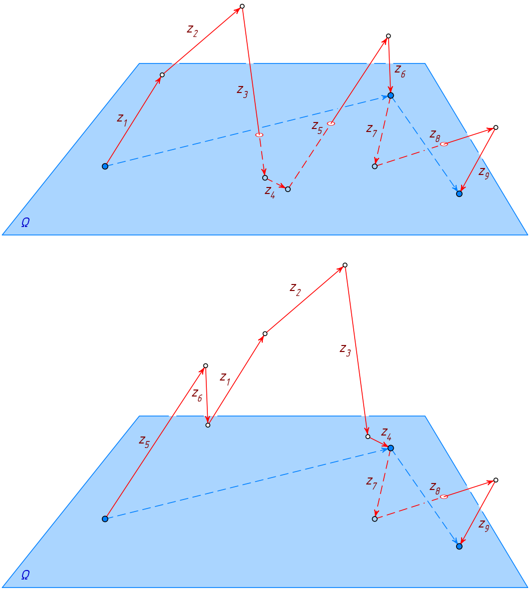
Определение 3. Набор $d-$мерных векторов $\{Z_n\}$ будем называть обобщённой системой *skew vectors* (говорить, что для набора выполняется условие (**GSV**), если для всякого подмножества индексов A и отличных от него подмножеств индексов $B_1 \subset \dots \subset B_{d-1}$, таких что $Z_A \neq Z_{B_i} - Z_{B_j}$ ни для каких $j < i$, векторы $Z_A, Z_{B_1}, \dots, Z_{B_{d-1}}$ линейно независимы.

Теорема. $P(\mathbf{GSV}) = 1$ эквивалентно (**H**).

Обобщение комбинаторной леммы

Теорема. (Обобщение комбинаторной леммы.) Пусть $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ – набор d-мерных векторов, для которых выполняется условие (**GSV**). $B = \{0, i_1, \dots, i_{d-2}, n\}$. $A = \{Z_{i_k+1}, \dots, Z_{i_{k+1}}\}$ для некоторого $0 \le k \le d-2$. Тогда существует единственная циклическая перестановка σ векторов из A, такая что ломанная, соединяющая точки S_{i_k} и $S_{i_{k+1}}$ будет полностью лежать в правом (левом) полупространстве относиительно гиперплоскости Ω, проходящей через точки $0, S_{i_1}, \dots, S_n$.

Обобщение комбинаторной леммы



Применение комбинаторной леммы

Лемма. Пусть $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют условию (**GSV**). $B = \{i_0 = 0, i_1, \ldots, i_{d-1} = n | i_k < i_{k+1}\}$. Пусть Ω определяется как в предыдущей тоереме, $i_{k+1} - i_k =: m_{k+1}$. Тогда существуют ровно

$$2(m_1 - 1)! \cdots (m_j - 1)! \cdots (m_{d-1} - 1)!$$

перестановок, таких что вся ломанная с началом в 0 и концом в S_n лежит в одном полупространстве относительно Ω.

Применение комбинаторной леммы

Пусть $g(x^1, \dots, x^{d-1})$ – симметричное измеримое отображение из $(\mathbb{R}^d)^{d-1}$ в $\mathbb{R}$. Будем говорить, что грань D выпуклой оболочки H_n определяется набором индексов $i_0 < i_1 < \cdots < i_{d-1}$ если она проходит через точки S_{i_0} ,. . . , $S_{i_{d-1}}$.

Рассмотрим случайную величину
$$G_n = \sum_{D \in \partial H_n} g(S_{i_1} - S_{i_0}, \dots, S_{i_{d-1}} - S_{i_{d-2}}) = \sum_{D \in \partial H_n} (B_{i_1}, \dots, B_{i_{d-1}}).$$

Теорема. Пусть скачки $Z_1, \ldots, Z_n$ удовлетворяют условию (**GSV**) с вероятностью 1 для всякого n, тогда

$$E(G_n) = \sum_{1 \le M_1 < \cdots < M_{d-1} \le n} \frac{2E(g(S_{M_1}, S_{M_2} - S_{M_1}, \ldots, S_{M_{d-1}} - S_{M_{d-2}}))}{M_1 \cdot (M_2 - M_1) \cdots (M_{d-1} - M_{d-2})}$$

$$n!E(G_n) = \sum_{\sigma} E(G_n(\sigma)) = E(\sum_{\sigma} G_n(\sigma))$$

$$\sum_{\sigma} G_n(\sigma) =$$

$$= \sum_{B_{i_1} \subset \cdots \subset B_{i_{d-1}}} 2(m_1 - 1)! \cdot (m_2 - 1)! \cdots (m_{d-1} - 1)! \cdot (n - \sum_{k=1}^{d-1} m_k)! \cdot E(g(B_{i_1}, \dots, B_{i_{d-1}})) =$$

$$= \sum_{B_{i_1} \subset \cdots \subset B_{i_{d-1}}} 2(M_1 - 1)! \cdot (M_2 - M_1 - 1)! \cdots (M_{d-1} - M_{d-2} - 1)! \cdot (n - M_{d-1})! E(g(B_{i_1}, \dots, B_{i_{d-1}})) =$$

$$= 2 \sum_{1 \le M_1 < \cdots < M_{d-1} \le n} (M_1 - 1)! \cdots (M_{d-1} - M_{d-2} - 1)! \cdot (n - M_{d-1})! \times$$

$$\times \binom{n}{M_{d-1}} \cdot \binom{M_{d-1}}{M_{d-2}} \cdots \binom{M_2}{M_1} E(g(B_{i_1}, \dots, B_{i_{d-1}})) =$$

$$= 2n! \sum_{1 \le M_1 < \cdots < M_{d-1} \le n} \frac{1}{M_1} \cdot \frac{1}{M_2 - M_1} \cdots \frac{1}{M_{d-1} - M_{d-2}} E(g(B_{i_1}, \dots, B_{i_{d-1}}))$$

Применение комбинаторной леммы

Пусть g — $(d-1)$-мерный объем грани D, натянутой на векторы $S_{M_1}, \ldots, S_{M_{d-1}} - S_{M_{d-2}}$. В данном случае применение формулы даёт следующий результат:

Теорема. Пусть $Z_1, \ldots, Z_n \ldots$ — независимые одинаково распределённые векторы в $\mathbb{R}^d$. Причём выполнено условие $P((\mathrm{GSV})) = 1$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$, $S_0 = 0$ — соответствующее случайное блуждание. C_n – выпуклая оболочка точек $\{S_0, \ldots, S_n\}$. E_n — математическое ожидание числа $(d-1)$-мерных граней H_n — границы C_n. Тогда

$$E_n \sim 2(\ln n)^{d-1}, n \to \infty.$$

Применение комбинаторной леммы

Теорема. Пусть $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ — независимые одинаково распределённые гауссовские векторы $N(0, \sigma^2 I)$ в $\mathbb{R}^d$. Пусть L_n — математическое ожидание суммарного $(d-1)$-мерного объёма всех граней H_n, где H_n — граница выпуклой оболочки C_n. Тогда

$$L_n = C(d) \cdot \sigma^{d-1} \cdot (H_n^{\frac{1}{2}})^{d-1},$$

где

$$H_n^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}},\ C(d) = 2\left(\frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1+d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{d-1} \cdot E(V^{(d-1)}).$$

Примечание. $E(V^{d-1})$ – математическое ожидание $(d-1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на единичные векторы, равномерно распределённые на единичной сфере.

Литература.

[1] Baxter, G. (1960). A combinatorial lemma for complex numbers. Air Research and Development Command, Office of Scientific Research, US Air Force.

[2] Vysotsky, V., Zaporozhets, D. (2018). Convex hulls of multidimensional random walks. Transactions of the American Mathematical Society, 370(11), 7985-8012.

[3] Rényi, A., Sulanke, R. (1963). Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 2(1), 75-84.

Спасибо за внимание!