Большие уклонения для случайного блуждания в случайного блуждания в случайном сценарии

Г.А. Бакай

МИАН им. Стеклова

08 ноября 2022

Вероятностная модель

Пусть случайные величины $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ – н.о.р. случайные векторы с значениями в $\mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_0 := 0, \; W_n := W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вероятностная модель

Пусть случайные величины $\varkappa_1, \ \varkappa_2, \ldots$ – н.о.р. случайные векторы с значениями в $\mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_0 := 0, \ W_n := W_{n-1} + \varkappa_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть случайные величины $X_i, \ i \in \mathbb{Z}^d$ – н.о.р. случайные величины. Случайные последовательности $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ и $\{\varkappa_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ предполагаются независимыми. Пусть

$$U_0 := 0, \quad U_n := \sum_{i=0}^{n-1} X_{W_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вероятностная модель

Пусть случайные величины $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ – н.о.р. случайные векторы с значениями в $\mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_0 := 0, \; W_n := W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть случайные величины $X_i, \; i \in \mathbb{Z}^d$ – н.о.р. случайные величины. Случайные последовательности $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ и $\{\kappa_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ предполагаются независимыми. Пусть

$$U_0 := 0, \quad U_n := \sum_{i=0}^{n-1} X_{W_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Данная модель называется random walk in random scenery(RWRS).

Предельные теоремы для U_n

О случайных элементах κ_1 и X_0 предполагается следующее:

$$\kappa_1 \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{E}\kappa_1 = 0, \quad \mathbf{E}|\kappa_1|^2 < +\infty,$$
$$\mathbf{E}X_0 = 0, \quad \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty).$$

Предельные теоремы для U_n

О случайных элементах κ_1 и X_0 предполагается следующее:

$$\kappa_1 \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{E}\kappa_1 = 0, \quad \mathbf{E}|\kappa_1|^2 < +\infty,$$
$$\mathbf{E}X_0 = 0, \quad \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty).$$

Для данного случая получены ЗБЧ, предельная теорема для U_n имеет вид

$$\frac{U_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y, \quad a_n = \begin{cases} n^{3/4}, & d = 1, \\ \sqrt{n \ln n}, & d = 2, \\ \sqrt{n}, & d > 2. \end{cases}$$

Случайная величина Y имеет нормальное распределение в случае $d \geq 2$. В случае $d = 1$ Y не имеет нормального распределения, но выражется в терминах интеграла Ито.

Предельные теоремы для U_n

О случайных элементах κ_1 и X_0 предполагается следующее:

$$\kappa_1 \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{E}\kappa_1 = 0, \quad \mathbf{E}|\kappa_1|^2 < +\infty,$$
$$\mathbf{E}X_0 = 0, \quad \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty).$$

Для данного случая получены ЗБЧ, предельная теорема для U_n имеет вид

$$\frac{U_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y, \quad a_n = \begin{cases} n^{3/4}, & d = 1, \\ \sqrt{n \ln n}, & d = 2, \\ \sqrt{n}, & d > 2. \end{cases}$$

Случайная величина Y имеет нормальное распределение в случае $d \geq 2$. В случае $d = 1$ Y не имеет нормального распределения, но выражется в терминах интеграла Ито.
Случай $d \neq 2$ рассмотрен в работе Kesten, Spitzer [1] (Бородин рассмотрел независимо случай $d = 1$ в работе [2]). Случай $d = 2$ расмотрен Bolthausen в работе [3].

ПБУ для U_n

Принцип больших уклонений получен в работе [4]. О шагах управляющего блуждания предположение имеет вид

$$\mathbf{E}\exp(t|\kappa_1|) < +\infty \text{ для некоторого } t > 0.$$

О распределении величин X_i предполагается следующее:

$$H(t) := \ln \mathbf{E}\exp(tX_0) < +\infty \text{ для всех } t > 0.$$

ПБУ для U_n

Принцип больших уклонений получен в работе [4]. О шагах управляющего блуждания предположение имеет вид

$$\mathbf{E}\exp(t|\kappa_1|) < +\infty \text{ для некоторого } t > 0.$$

О распределении величин X_i предполагается следующее:

$$H(t) := \ln \mathbf{E}\exp(tX_0) < +\infty \text{ для всех } t > 0.$$

Положим

$$\widetilde{p} := \limsup_{t\to+\infty} \ln H(t)/\ln t.$$

Theorem

Пусть $\mathbf{E}X_0 = 0$ *и* $\widetilde{p} < +\infty$ *при* $d \le 2$ *или* $\widetilde{p} < d/(d-2)$ *при* $d > 2$. *Тогда для произвольного* $u > 0$, $u \in \operatorname{int}(\operatorname{supp} X_0)$, *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-d/(d+2)} \ln \mathbf{P}(U_n > un) = -K_H(u).$$

Функция уклонений для U_n

Функция $K_H(u)$ имеет вид

$$K_H(u) := \inf\left\{ \frac{1}{2}\left|\left|\Gamma^{1/2}\nabla\psi\right|\right|_2^2 + \Phi_H\left(\psi^2, u\right) : \psi \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right), ||\psi||_2 = 1 \right\},$$

$$\Gamma_{i,j} := \mathrm{cov}(\kappa_{1,i}, \kappa_{1,j}), \quad \Phi_H\left(\psi^2, u\right) := \sup_{\gamma\in(0,+\infty)} \left(\gamma u - \int\limits_{\mathbb{R}^d} H\left(\gamma\psi^2(y)\right) dy \right).$$

Функция $K_H(u)$ положительна.

Мы рассматриваем случай, когда управляющее блуждание $\{W_n\}_{n\geq 0}$ является простым блужданием с положительным сносом:

$$\mathbf{P}(\kappa_1 = 1) = p, \; \mathbf{P}(\kappa_1 = -1) = q, \quad p + q = 1, \; 0 < q < p < 1,$$
$$W_0 = 0, \quad W_n = W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и величины X_i неотрицательны и целочисленны.

Мы рассматриваем случай, когда управляющее блуждание $\{W_n\}_{n\geq 0}$ является простым блужданием с положительным сносом:

$$\mathbf{P}(\kappa_1 = 1) = p,\ \mathbf{P}(\kappa_1 = -1) = q, \quad p + q = 1,\ 0 < q < p < 1,$$
$$W_0 = 0, \quad W_n = W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и величины X_i неотрицательны и целочисленны. Положим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как и прежде,

$$U_0 = 0, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_{W_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем случайные величины S_n следующим образом:

$$S_0 := 0,\ S_n := U_{T_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Мы рассматриваем случай, когда управляющее блуждание $\{W_n\}_{n\geq 0}$ является простым блужданием с положительным сносом:

$$\mathbf{P}(\kappa_1 = 1) = p,\ \mathbf{P}(\kappa_1 = -1) = q, \quad p + q = 1,\ 0 < q < p < 1,$$
$$W_0 = 0, \quad W_n = W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и величины X_i неотрицательны и целочисленны. Положим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как и прежде,

$$U_0 = 0, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_{W_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем случайные величины S_n следующим образом:

$$S_0 := 0,\ S_n := U_{T_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Изучается асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n = x), \quad n \to \infty.$$

Регенерация для S_n

Величины $S_n,\ n \in \mathbb{N}$, допускают представление

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \xi_k + \zeta, \quad N_n := \max\left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} \eta_j \le n \right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Регенерация для S_n

Величины S_n, $n \in \mathbb{N}$, допускают представление

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \xi_k + \zeta, \quad N_n := \max\left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} \eta_j \le n \right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Случайные векторы (ξ_i, η_i), $i \in \mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены. Распределение (ξ_1, η_1) имеет вид:

$$\eta_1 := \tau, \quad \xi_1 := \sum_{j=1}^{\tau} X_j(1 + Z_{j-1} + Z_j),$$

$$Z_0 := 0,\ Z_{i+1} := \sum_{j=1}^{1+Z_i} Y_{i,j}, \quad \tau := \min\{k \in \mathbb{N} :\ Z_k = 0\},$$

$$\mathbf{P}(Y_{i,j} = k) = pq^k, \quad i, j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Необходимые обозначения для ООПВ

Напомним

$$S_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta, \quad N_n = \max\{k \geq 0 : \ \eta_1 + \ldots + \eta_k \leq n\}.$$

Положим

$$R(h,t) := \mathbf{E} \exp(h\xi + t\eta), \quad \widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbf{E} \exp(hS_k; \ \eta > k).$$

Необходимые обозначения для ООПВ

Напомним

$$S_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta, \quad N_n = \max\{k \geq 0 : \ \eta_1 + \ldots + \eta_k \leq n\}.$$

Положим

$$R(h,t) := \mathbf{E} \exp(h\xi + t\eta), \quad \widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbf{E} \exp(hS_k; \ \eta > k).$$

Put

$$A := \operatorname{int}\{(h,t) : \ \max(R(h,t), \ \widehat{R}(h,t)) < +\infty\},$$
$$B := \operatorname{int}\left\{h : \exists t : \ (h,t) \in A, \quad R(h,t) > 1\right\},$$
$$B' := \{-t_0'(h) : \ h \in B\}, \quad t_0(h) : \ R(h, t_0(h)) = 1.$$

Больльшие уклонения для ООПВ

Справедлива следующая теорема.

Theorem (Могульский, [5)

] Пусть последовательность величин $\{S_n\}_{n\geq 0}$ определена соотношением (1) и множество B непусто. Тогда выполнено следующее соотношение

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{F_1(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right) n\right), \quad n \to +\infty.$$

Соотношение выполняется равномерно по $k = k(n)$ таким, что $k(n) \in \mathbb{N}$ и k/n принадлежат некоторому компакту $K' \subset B'$. Здесь

$$L(\theta) = \theta h_\theta + t_0\left(h_\theta\right), \quad h_\theta : \ (-t_0)'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in B',$$

$$F_1(\theta) := \frac{\widehat{R}(h_\theta, t_0(h_\theta))}{\sqrt{2\pi(-t_0''(h_\theta))} R_t'(h_\theta, t_0(h_\theta))}.$$

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.
Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$ что выполнены следующие соотношения:

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.

Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$ что выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ W_i \geq 0,\ i \leq T_n) = \rho_0(h)\rho(h)^n + \delta^n \rho(h)^n o(1), \qquad (2)$$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad n \to \infty, \qquad (3)$$

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.
Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$ что выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ W_i \geq 0,\ i \leq T_n) = \rho_0(h)\rho(h)^n + \delta^n \rho(h)^n o(1), \qquad (2)$$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad n \to \infty, \qquad (3)$$

$\rho(h)$ непрерывна и положительна на H,

$$0 < \inf_{h\in K} \rho_0(h), \quad \sup_{h\in K} \rho_0(h) < +\infty,$$

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.

Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$ что выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ W_i \geq 0,\ i \leq T_n) = \rho_0(h)\rho(h)^n + \delta^n \rho(h)^n o(1), \qquad (2)$$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad n \to \infty, \qquad (3)$$

$$\rho(h) \text{ непрерывна и положительна на H,}$$

$$0 < \inf_{h\in K} \rho_0(h), \quad \sup_{h\in K} \rho_0(h) < +\infty,$$

Тогда выполнены условия теоремы Могульского и справедливы соотношения

$$\ln \rho(h) = -t_0(h), \quad \rho_0(h) = \left(R_t'(h, t_0(h))\right)^{-1}, \quad H \subset B.$$

Степень оператора

В качестве множества H рассмотрим $(-\infty, 0)$. Заметим, что

$$\mathbf{E}\exp(hS_n; W_i \geq 0,\ i \leq T_n) = \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{n} R(h(1+Z_{j-1}+Z_j)); Z_n = 0\right),$$

$$R(h) := \mathbf{E}\exp(hX_0).$$

Степень оператора

В качестве множества H рассмотрим $(-\infty, 0)$. Заметим, что

$$\mathbf{E}\exp(hS_n; W_i \geq 0,\ i \leq T_n) = \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{n} R(h(1+Z_{j-1}+Z_j)); Z_n = 0\right),$$
$$R(h) := \mathbf{E}\exp(hX_0).$$

Последовательность случайных элементов

$$\lambda_i = (Z_{i-1}, Z_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

образует марковскую цепь.

Степень оператора

В качестве множества H рассмотрим $(-\infty, 0)$. Заметим, что

$$\mathbf{E} \exp(hS_n; W_i \geq 0,\ i \leq T_n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^{n} R(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_n = 0 \right),$$

$$R(h) := \mathbf{E} \exp(hX_0).$$

Последовательность случайных элементов

$$\lambda_i = (Z_{i-1}, Z_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

образует марковскую цепь. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp(hS_n; W_i \geq 0,\ i \leq T_n) &= \pi_0 Q_R^n(h) e_0, \\ Q_R(h)_{x,y} &:= P(x,y) R(h(1 + y_1 + y_2)), \\ P(x,y) &:= \mathbf{P}(\lambda_2 = y | \lambda_1 = x),\ x, y \in \mathbb{N}_0^2. \end{aligned}$$

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_R(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : \ z \in spec(Q_R(h))\} \tag{4}$$

положительна при всех h,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_R(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : \ z \in spec(Q_R(h))\} \qquad (4)$$

положительна при всех h, является собственным значением,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_R(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : \ z \in spec(Q_R(h))\} \tag{4}$$

положительна при всех h, является собственным значением, корневое подпространство одномерно,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_R(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : \ z \in spec(Q_R(h))\} \tag{4}$$

положительна при всех h, является собственным значением, корневое подпространство одномерно, собственные "левый" и "правый" векторы могут выбраны с положительными координатами,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_R(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : \ z \in spec(Q_R(h))\} \tag{4}$$

положительна при всех h, является собственным значением, корневое подпространство одномерно, собственные "левый" и "правый" векторы могут выбраны с положительными координатами,строго превосходит по модулю все остальные значения спектра.

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h<0$) оператор $Q_R(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : \ z \in spec(Q_R(h))\} \tag{4}$$

положительна при всех h, является собственным значением, корневое подпространство одномерно, собственные "левый" и "правый" векторы могут выбраны с положительными координатами,строго превосходит по модулю все остальные значения спектра. Отсюда при каждом фиксированном $h<0$ получаем

$$\pi_0 Q_R^n(h) e_0 = \rho^n(h)(\langle \pi_0, u(h)\rangle \langle f(h), e_0\rangle + \delta(h)^n o(1)), \quad n \to \infty,$$
$$Q_R(h)u(h) = \rho(h)u(h), \quad f(h)Q_R(h) = \rho(h)f(h), \quad \langle f(h), u(h)\rangle = 1,$$

то есть выполнено соотношение (2). Положим

$$\rho_0(h) := \langle \pi_0, u(h)\rangle \langle f(h), e_0\rangle. \tag{5}$$

Оценка сверху для суммы на неоконченном цикле

Покажем, что выполнено соотношение

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \delta(h)^n \rho(h)^n o(1).$$

Имеем

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{n} R(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_i > 0, i \le n\right),$$

откуда $(\pi_0 = (1, 0, 0, \ldots), e_1 = (1, 1, 1, \ldots)^t)$

Оценка сверху для суммы на неоконченном цикле

Покажем, что выполнено соотношение

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \delta(h)^n \rho(h)^n o(1).$$

Имеем

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{n} R(h(1+Z_{j-1}+Z_j)); Z_i > 0, i \leq n\right),$$

откуда $(\pi_0 = (1,0,0,\ldots), e_1 = (1,1,1,\ldots)^t)$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \pi_0 \widehat{Q}_R^n(h) e_1,$$
$$\widehat{Q}_R(h)_{x,y} := \widehat{P}_0(x,y) R(h(1+y_1+y_2)).$$

Оценка сверху для суммы на неоконченном цикле

Покажем, что выполнено соотношение

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \delta(h)^n \rho(h)^n o(1).$$

Имеем

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{n} R(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_i > 0, i \le n\right),$$

откуда $(\pi_0 = (1, 0, 0, \ldots), e_1 = (1, 1, 1, \ldots)^t)$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = \pi_0 \widehat{Q}_R^n(h) e_1,$$
$$\widehat{Q}_R(h)_{x,y} := \widehat{P}_0(x, y) R(h(1 + y_1 + y_2)).$$

Здесь

$$\forall x\ \widehat{P}_0(x, (0, 0)) = 0, \quad \widehat{P}_0(x, y) = P(x, y), y \ne (0, 0).$$

Сп.р. $\widehat{Q}_R(h)$ и равномерность по h

Оператор $\widehat{Q}_R(h)$ "не превосходит" оператор $Q_R(h)$, следовательно, при некоторых дополнительных условиях, которые выполнены в условиях задачи, имеем

$$\max\left\{|z| : z \in spec\left(\widehat{Q}_R(h)\right)\right\} := \widehat{\rho}(h) < \delta(h)\rho(h), \quad h < 0.$$

Сп.р. $\widehat{Q}_R(h)$ и равномерность по h

Оператор $\widehat{Q}_R(h)$ "не превосходит" оператор $Q_R(h)$, следовательно, при некоторых дополнительных условиях, которые выполнены в условиях задачи, имеем

$$\max\left\{|z| : z \in spec\left(\widehat{Q}_R(h)\right)\right\} := \widehat{\rho}(h) < \delta(h)\rho(h), \quad h < 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = o(1)\delta^n(h)\rho^n(h), \quad n \to \infty,$$

то есть выполнено соотношение (3).

Сп.р. $\widehat{Q}_R(h)$ и равномерность по h

Оператор $\widehat{Q}_R(h)$ "не превосходит" оператор $Q_R(h)$, следовательно, при некоторых дополнительных условиях, которые выполнены в условиях задачи, имеем

$$\max\left\{|z| : z \in spec\left(\widehat{Q}_R(h)\right)\right\} := \widehat{\rho}(h) < \delta(h)\rho(h), \quad h < 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n);\ \eta > n) = o(1)\delta^n(h)\rho^n(h), \quad n \to \infty,$$

то есть выполнено соотношение (3).
Результаты Като ([?]) позволяют доказать, что функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ полжительны и непрерывны при $h < 0$, и величину $\delta(h)$ при $h \in K \subset (-\infty, 0)$ можно выбрать независящей от h.

Итоговый результат

Справедлива теорема.

Theorem

Пусть величины S_n определены соотноешнием (1) и величины X_i являются н.о.р., целочисленны и неотрицательны. Тогда выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{F_1(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right)n\right), \quad n \to +\infty.$$

Соотношение выполняется равномерно по $k = k(n)$ таким, что $k(n) \in \mathbb{N}$ и k/n принадлежат некоторому компакту $K' \subset B' := \{(\ln\rho)'(h) : \ h < 0\}$. Здесь

$$L(\theta) = \theta h_\theta - \ln\rho\left(h_\theta\right), \quad h_\theta : \ (\ln\rho)'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in B',$$

$$F_1(\theta) := \frac{\rho_0(h_\theta)}{\sqrt{2\pi(\ln\rho)''(h_\theta))}} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h_\theta)\mathbf{E}(\exp(h_\theta S_k); \eta > k).$$

Библиография, ч.1

1 Harry Kesten and Frank Spitzer. "A limit theorem related to a new class of self similar processes." Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 50, 1, 5-25, 1979.

2 Erwin Bolthausen. "A central limit theorem for two-dimensional random walks in random sceneries". The Annals of Probability, 108-115, 1989.

3 Андрей Бородин. "Предельная теорема для сумм независимых случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании." Российская академия наук, Доклады Академии наук, 246, 4, 786-788, 1979.

Библиография, ч.2

4 Nina Gantert, Wolfgang König, and Zhan Shi. "Annealed deviations of random walk in random scenery." Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, 43, 1, 47-76, 2007.

5 Анатолий Могульский. "Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера." Сибирские электронные математические известия, 16, 21-41, 2019.

6 Гавриил Бакай. "О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей." Труды Математического института имени В.А. Стеклова, 316, 47-63, 2022.