

Большие отклонения для случайного блуждания в случайного блуждания в случайном сценарии

Г.А. Бакай

МИАН им. Стеклова

08 ноября 2022

Вероятностная модель

Пусть случайные величины $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ – н.о.р. случайные векторы с значениями в $\mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_0 := 0, \quad W_n := W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вероятностная модель

Пусть случайные величины $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ – н.о.р. случайные векторы с значениями в $\mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_0 := 0, \quad W_n := W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть случайные величины $X_i, i \in \mathbb{Z}^d$ – н.о.р. случайные величины. Случайные последовательности $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ и $\{\kappa_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ предполагаются независимыми. Пусть

$$U_0 := 0, \quad U_n := \sum_{i=0}^{n-1} X_{W_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вероятностная модель

Пусть случайные величины $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ – н.о.р. случайные векторы с значениями в $\mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_0 := 0, \quad W_n := W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть случайные величины $X_i, i \in \mathbb{Z}^d$ – н.о.р. случайные величины. Случайные последовательности $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ и $\{\kappa_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ предполагаются независимыми. Пусть

$$U_0 := 0, \quad U_n := \sum_{i=0}^{n-1} X_{W_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Данная модель называется random walk in random scenery(RWRS).

Предельные теоремы для U_n

О случайных элементах κ_1 и X_0 предполагается следующее:

$$\kappa_1 \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{E}\kappa_1 = 0, \quad \mathbf{E}|\kappa_1|^2 < +\infty,$$

$$\mathbf{E}X_0 = 0, \quad \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty).$$

Предельные теоремы для U_n

О случайных элементах κ_1 и X_0 предполагается следующее:

$$\kappa_1 \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{E}\kappa_1 = 0, \quad \mathbf{E}|\kappa_1|^2 < +\infty,$$

$$\mathbf{E}X_0 = 0, \quad \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty).$$

Для данного случая получены ЗБЧ, предельная теорема для U_n имеет вид

$$\frac{U_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y, \quad a_n = \begin{cases} n^{3/4}, & d = 1, \\ \sqrt{n \ln n}, & d = 2, \\ \sqrt{n}, & d > 2. \end{cases}$$

Случайная величина Y имеет нормальное распределение в случае $d \geq 2$. В случае $d = 1$ Y не имеет нормального распределения, но выражается в терминах интеграла Ито.

Предельные теоремы для U_n

О случайных элементах κ_1 и X_0 предполагается следующее:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &\in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{E}\kappa_1 = 0, \quad \mathbf{E}|\kappa_1|^2 < +\infty, \\ \mathbf{E}X_0 &= 0, \quad \mathbf{E}X_0^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Для данного случая получены ЗБЧ, предельная теорема для U_n имеет вид

$$\frac{U_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y, \quad a_n = \begin{cases} n^{3/4}, & d = 1, \\ \sqrt{n \ln n}, & d = 2, \\ \sqrt{n}, & d > 2. \end{cases}$$

Случайная величина Y имеет нормальное распределение в случае $d \geq 2$. В случае $d = 1$ Y не имеет нормального распределения, но выражается в терминах интеграла Ито.

Случай $d \neq 2$ рассмотрен в работе Kesten, Spitzer [1] (Бородин рассмотрел независимо случай $d = 1$ в работе [2]). Случай $d = 2$ рассмотрен Bolthausen в работе [3].

ПБУ для U_n

Принцип больших уклонений получен в работе [4]. О шагах управляющего блуждания предположение имеет вид

$$\mathbf{E} \exp(t|\kappa_1|) < +\infty \text{ для некоторого } t > 0.$$

О распределении величин X_i предполагается следующее:

$$H(t) := \ln \mathbf{E} \exp(tX_0) < +\infty \text{ для всех } t > 0.$$

ПБУ для U_n

Принцип больших уклонений получен в работе [4]. О шагах управляющего блуждания предположение имеет вид

$$\mathbf{E} \exp(t|\kappa_1|) < +\infty \text{ для некоторого } t > 0.$$

О распределении величин X_i предполагается следующее:

$$H(t) := \ln \mathbf{E} \exp(tX_0) < +\infty \text{ для всех } t > 0.$$

Положим

$$\tilde{p} := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \ln H(t) / \ln t.$$

Theorem

Пусть $\mathbf{E}X_0 = 0$ и $\tilde{p} < +\infty$ при $d \leq 2$ или $\tilde{p} < d/(d-2)$ при $d > 2$. Тогда для произвольного $u > 0$, $u \in \text{int}(\text{supp } X_0)$, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-d/(d+2)} \ln \mathbf{P}(U_n > un) = -K_H(u).$$

Функция уклонений для U_n

Функция $K_H(u)$ имеет вид

$$K_H(u) := \inf \left\{ \frac{1}{2} \left\| \Gamma^{1/2} \nabla \psi \right\|_2^2 + \Phi_H(\psi^2, u) : \psi \in H^1(\mathbb{R}^d), \|\psi\|_2 = 1 \right\},$$

$$\Gamma_{i,j} := \text{cov}(\kappa_{1,i}, \kappa_{1,j}), \quad \Phi_H(\psi^2, u) := \sup_{\gamma \in (0, +\infty)} \left(\gamma u - \int_{\mathbb{R}^d} H(\gamma \psi^2(y)) dy \right).$$

Функция $K_H(u)$ положительна.

Мы рассматриваем случай, когда управляющее блуждание $\{W_n\}_{n \geq 0}$ является простым блужданием с положительным сносом:

$$\mathbf{P}(\kappa_1 = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\kappa_1 = -1) = q, \quad p + q = 1, \quad 0 < q < p < 1, \\ W_0 = 0, \quad W_n = W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и величины X_i неотрицательны и целочисленны.

Мы рассматриваем случай, когда управляющее блуждание $\{W_n\}_{n \geq 0}$ является простым блужданием с положительным сносом:

$$\mathbf{P}(\kappa_1 = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\kappa_1 = -1) = q, \quad p + q = 1, \quad 0 < q < p < 1, \\ W_0 = 0, \quad W_n = W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и величины X_i неотрицательны и целочисленны. Положим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как и прежде,

$$U_0 = 0, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_{W_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем случайные величины S_n следующим образом:

$$S_0 := 0, \quad S_n := U_{T_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Мы рассматриваем случай, когда управляющее блуждание $\{W_n\}_{n \geq 0}$ является простым блужданием с положительным сносом:

$$\mathbf{P}(\kappa_1 = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\kappa_1 = -1) = q, \quad p + q = 1, \quad 0 < q < p < 1, \\ W_0 = 0, \quad W_n = W_{n-1} + \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и величины X_i неотрицательны и целочисленны. Положим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \min\{k \in \mathbb{N} : W_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как и прежде,

$$U_0 = 0, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_{W_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем случайные величины S_n следующим образом:

$$S_0 := 0, \quad S_n := U_{T_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Изучается асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n = x), \quad n \rightarrow \infty.$$

Регенерация для S_n

Величины S_n , $n \in \mathbb{N}$, допускают представление

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \xi_k + \zeta, \quad N_n := \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \eta_j \leq n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Регенерация для S_n

Величины S_n , $n \in \mathbb{N}$, допускают представление

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \xi_k + \zeta, \quad N_n := \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \eta_j \leq n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Случайные векторы (ξ_i, η_i) , $i \in \mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены. Распределение (ξ_1, η_1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= \tau, \quad \xi_1 := \sum_{j=1}^{\tau} X_j(1 + Z_{j-1} + Z_j), \\ Z_0 &:= 0, \quad Z_{i+1} := \sum_{j=1}^{1+Z_i} Y_{i,j}, \quad \tau := \min\{k \in \mathbb{N} : Z_k = 0\}, \\ \mathbf{P}(Y_{i,j} = k) &= pq^k, \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Необходимые обозначения для ООПВ

Напомним

$$S_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta, \quad N_n = \max\{k \geq 0 : \eta_1 + \dots + \eta_k \leq n\}.$$

Положим

$$R(h, t) := \mathbf{E} \exp(h\xi + t\eta), \quad \hat{R}(h, t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbf{E} \exp(hS_k; \eta > k).$$

Необходимые обозначения для ООПВ

Напомним

$$S_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta, \quad N_n = \max\{k \geq 0 : \eta_1 + \dots + \eta_k \leq n\}.$$

Положим

$$R(h, t) := \mathbf{E} \exp(h\xi + t\eta), \quad \hat{R}(h, t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbf{E} \exp(hS_k; \eta > k).$$

Put

$$\begin{aligned} A &:= \text{int}\{(h, t) : \max(R(h, t), \hat{R}(h, t)) < +\infty\}, \\ B &:= \text{int}\{h : \exists t : (h, t) \in A, \quad R(h, t) > 1\}, \\ B' &:= \{-t'_0(h) : h \in B\}, \quad t_0(h) : R(h, t_0(h)) = 1. \end{aligned}$$

Большие уклонения для ООПВ

Справедлива следующая теорема.

Theorem (Могульский, (5))

Пусть последовательность величин $\{S_n\}_{n \geq 0}$ определена соотношением (1) и множество B непусто. Тогда выполнено следующее соотношение

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{F_1(k/n)}{\sqrt{n}} \exp \left(-L \left(\frac{k}{n} \right) n \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Соотношение выполняется равномерно по $k = k(n)$ таким, что $k(n) \in \mathbb{N}$ и k/n принадлежат некоторому компакту $K' \subset B'$. Здесь

$$L(\theta) = \theta h_\theta + t_0(h_\theta), \quad h_\theta : (-t_0)'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in B',$$

$$F_1(\theta) := \frac{\hat{R}(h_\theta, t_0(h_\theta))}{\sqrt{2\pi(-t_0''(h_\theta))} R_t'(h_\theta, t_0(h_\theta))}.$$

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.

Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0, 1)$ что выполнены следующие соотношения:

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.

Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0, 1)$ что выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); W_i \geq 0, i \leq T_n) = \rho_0(h)\rho(h)^n + \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.

Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0, 1)$ что выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); W_i \geq 0, i \leq T_n) = \rho_0(h)\rho(h)^n + \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$\rho(h)$ непрерывна и положительна на H ,

$$0 < \inf_{h \in K} \rho_0(h), \quad \sup_{h \in K} \rho_0(h) < +\infty,$$

Достаточные условия для теоремы Могульского

Был получен следующий результат.

Теорема. ([6]) Пусть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ определена соотношением (1) и для некоторого открытого множества $H \subset \mathbb{R}$, его произвольного компакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0, 1)$ что выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); W_i \geq 0, i \leq T_n) = \rho_0(h)\rho(h)^n + \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \delta^n \rho(h)^n o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$\rho(h)$ непрерывна и положительна на H ,

$$0 < \inf_{h \in K} \rho_0(h), \quad \sup_{h \in K} \rho_0(h) < +\infty,$$

Тогда выполнены условия теоремы Могульского и справедливы соотношения

$$\ln \rho(h) = -t_0(h), \quad \rho_0(h) = (R'_t(h, t_0(h)))^{-1}, \quad H \subset B.$$

Степень оператора

В качестве множества H рассмотрим $(-\infty, 0)$. Заметим, что

$$\mathbf{E} \exp(hS_n; W_i \geq 0, i \leq T_n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^n G(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_n = 0 \right),$$
$$G(h) := \mathbf{E} \exp(hX_0).$$

Степень оператора

В качестве множества H рассмотрим $(-\infty, 0)$. Заметим, что

$$\mathbf{E} \exp(hS_n; W_i \geq 0, i \leq T_n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^n G(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_n = 0 \right),$$

$$G(h) := \mathbf{E} \exp(hX_0).$$

Последовательность случайных элементов

$$\lambda_i = (Z_{i-1}, Z_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

образует марковскую цепь.

Степень оператора

В качестве множества H рассмотрим $(-\infty, 0)$. Заметим, что

$$\mathbf{E} \exp(hS_n; W_i \geq 0, i \leq T_n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^n G(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_n = 0 \right),$$

$$G(h) := \mathbf{E} \exp(hX_0).$$

Последовательность случайных элементов

$$\lambda_i = (Z_{i-1}, Z_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

образует марковскую цепь. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp(hS_n; W_i \geq 0, i \leq T_n) &= \pi_0 Q_R^n(h) e_0, \\ Q_G(h)_{x,y} &:= P(x, y) G(h(1 + y_1 + y_2)), \\ P(x, y) &:= \mathbf{P}(\lambda_2 = y | \lambda_1 = x), \quad x, y \in \mathbb{N}_0^2. \end{aligned}$$

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_G(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : z \in \text{spec}(Q_G(h))\} \quad (4)$$

положительна при всех h ,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_G(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : z \in \text{spec}(Q_G(h))\} \quad (4)$$

положительна при всех h , является собственным значением,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_G(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : z \in \text{spec}(Q_G(h))\} \quad (4)$$

положительна при всех h , является собственным значением, корневое подпространство одномерно,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_G(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : z \in \text{spec}(Q_G(h))\} \quad (4)$$

положительна при всех h , является собственным значением, корневое подпространство одномерно, собственные "левый" и "правый" векторы могут выбраны с положительными координатами,

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_G(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : z \in \text{spec}(Q_G(h))\} \quad (4)$$

положительна при всех h , является собственным значением, корневое подпространство одномерно, собственные "левый" и "правый" векторы могут выбраны с положительными координатами, строго превосходит по модулю все остальные значения спектра.

В условиях рассматриваемой задачи (величины X_i неотрицательны и $h < 0$) оператор $Q_G(h)$ является компактным, функция

$$\rho(h) := \max\{|z| : z \in \text{spec}(Q_G(h))\} \quad (4)$$

положительна при всех h , является собственным значением, корневое подпространство одномерно, собственные "левый" и "правый" векторы могут выбраны с положительными координатами, строго превосходит по модулю все остальные значения спектра. Отсюда при каждом фиксированном $h < 0$ получаем

$$\begin{aligned} \pi_0 Q_G^n(h) e_0 &= \rho^n(h) (\langle \pi_0, u(h) \rangle \langle f(h), e_0 \rangle + \delta(h)^n o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \\ Q_G(h) u(h) &= \rho(h) u(h), \quad f(h) Q_G(h) = \rho(h) f(h), \quad \langle f(h), u(h) \rangle = 1, \end{aligned}$$

то есть выполнено соотношение (2). Положим

$$\rho_0(h) := \langle \pi_0, u(h) \rangle \langle f(h), e_0 \rangle. \quad (5)$$

Оценка сверху для суммы на неоконченном цикле

Покажем, что выполнено соотношение

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \delta(h)^n \rho(h)^n o(1).$$

Имеем

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^n G(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_i > 0, i \leq n \right),$$

откуда $(\pi_0 = (1, 0, 0, \dots), e_1 = (1, 1, 1, \dots)^t)$

Оценка сверху для суммы на неоконченном цикле

Покажем, что выполнено соотношение

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \delta(h)^n \rho(h)^n o(1).$$

Имеем

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^n G(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_i > 0, i \leq n \right),$$

откуда $(\pi_0 = (1, 0, 0, \dots), e_1 = (1, 1, 1, \dots)^t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) &= \pi_0 \hat{Q}_G^n(h) e_1, \\ \hat{Q}_G(h)_{x,y} &:= \hat{P}_0(x, y) G(h(1 + y_1 + y_2)). \end{aligned}$$

Оценка сверху для суммы на неоконченном цикле

Покажем, что выполнено соотношение

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \delta(h)^n \rho(h)^n o(1).$$

Имеем

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^n G(h(1 + Z_{j-1} + Z_j)); Z_i > 0, i \leq n \right),$$

откуда $(\pi_0 = (1, 0, 0, \dots), e_1 = (1, 1, 1, \dots)^t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) &= \pi_0 \hat{Q}_G^n(h) e_1, \\ \hat{Q}_G(h)_{x,y} &:= \hat{P}_0(x, y) G(h(1 + y_1 + y_2)). \end{aligned}$$

Здесь

$$\forall x \quad \hat{P}_0(x, (0, 0)) = 0, \quad \hat{P}_0(x, y) = P(x, y), y \neq (0, 0).$$

Сп.р. $\hat{Q}_G(h)$ и равномерность по h

Оператор $\hat{Q}_G(h)$ "не превосходит" оператор $Q_G(h)$, следовательно, при некоторых дополнительных условиях, которые выполнены в условиях задачи, имеем

$$\max \left\{ |z| : z \in \text{spec} \left(\hat{Q}_G(h) \right) \right\} =: \hat{\rho}(h) < \delta(h)\rho(h), \quad h < 0.$$

Сп.р. $\hat{Q}_G(h)$ и равномерность по h

Оператор $\hat{Q}_G(h)$ "не превосходит" оператор $Q_G(h)$, следовательно, при некоторых дополнительных условиях, которые выполнены в условиях задачи, имеем

$$\max \left\{ |z| : z \in \text{spec} \left(\hat{Q}_G(h) \right) \right\} =: \hat{\rho}(h) < \delta(h)\rho(h), \quad h < 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = o(1)\delta^n(h)\rho^n(h), \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть выполнено соотношение (3).

Сп.р. $\hat{Q}_G(h)$ и равномерность по h

Оператор $\hat{Q}_G(h)$ "не превосходит" оператор $Q_G(h)$, следовательно, при некоторых дополнительных условиях, которые выполнены в условиях задачи, имеем

$$\max \left\{ |z| : z \in \text{spec} \left(\hat{Q}_G(h) \right) \right\} =: \hat{\rho}(h) < \delta(h)\rho(h), \quad h < 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{E}(\exp(hS_n); \eta > n) = o(1)\delta^n(h)\rho^n(h), \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть выполнено соотношение (3).

Результаты Като [7] позволяют доказать, что функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ положительны и непрерывны при $h < 0$, и величину $\delta(h)$ при $h \in K \subset (-\infty, 0)$ можно выбрать независимой от h .

Итоговый результат

Справедлива теорема.

Theorem

Пусть величины S_n определены соотношением (1) и величины X_i являются н.о.р., целочисленны и неотрицательны. Тогда выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{F_1(k/n)}{\sqrt{n}} \exp \left(-L \left(\frac{k}{n} \right) n \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Соотношение выполняется равномерно по $k = k(n)$ таким, что $k(n) \in \mathbb{N}$ и k/n принадлежат некоторому компакту

$K' \subset B' := \{(\ln \rho)'(h) : h < 0\}$. Здесь

$$L(\theta) = \theta h_\theta - \ln \rho(h_\theta), \quad h_\theta : (\ln \rho)'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in B',$$

$$F_1(\theta) := \frac{\rho_0(h_\theta)}{\sqrt{2\pi(\ln \rho)''(h_\theta)}} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h_\theta) \mathbf{E}(\exp(h_\theta S_k); \eta > k).$$

Библиография, ч.1

- 1 Harry Kesten and Frank Spitzer. "A limit theorem related to a new class of self similar processes." Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 50, 1, 5-25, 1979.
- 2 Erwin Bolthausen. "A central limit theorem for two-dimensional random walks in random sceneries". The Annals of Probability, 108-115, 1989.
- 3 Андрей Бородин. "Предельная теорема для сумм независимых случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании." Российская академия наук, Доклады Академии наук, 246, 4, 786-788, 1979.

Библиография, ч.2

- 4 Nina Gantert, Wolfgang König, and Zhan Shi. "Annealed deviations of random walk in random scenery." *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 43, 1, 47-76, 2007.
- 5 Анатолий Могульский. "Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера." *Сибирские электронные математические известия*, 16, 21-41, 2019.
- 6 Гавриил Бакай. "О характеристизации вероятностей больших отклонений для регенерирующих последовательностей." *Труды Математического института имени В.А. Стеклова*, 316, 47-63, 2022.
- 7 Т. Като. Теория возмущений линейных операторов: монография, 1972, издательство: Мир