КВАЗИБЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Алексей Андреевич Хартов
(совместно с И. А. Алексеевым)
Смоленский Государственный Университет
Университет ИТМО (СПб)

Вторая конференция математических центров России

7–11 ноября 2022 г.
Москва

Общая постановка задачи и обозначения.

Факт: *Существуют распределения, чьи характеристические функции допускают* ***представление Леви-Хинчина*** *с, вообще говоря, немонотонной спектральной функцией и, возможно, имеющей неограниченную вариацию на бесконечности.*

Общая постановка задачи и обозначения.

Факт: *Существуют распределения, чьи характеристические функции допускают* ***представление Леви-Хинчина*** *с, вообще говоря, немонотонной спектральной функцией и, возможно, имеющей неограниченную вариацию на бесконечности.*

Задача: *описать класс таких распределений и на основе указанных представлений составить новые предельные теоремы.*

Общая постановка задачи и обозначения.

Факт: *Существуют распределения, чьи характеристические функции допускают* ***представление Леви-Хинчина*** *с, вообще говоря, немонотонной спектральной функцией и, возможно, имеющей неограниченную вариацию на бесконечности.*

Задача: *описать класс таких распределений и на основе указанных представлений составить новые предельные теоремы.*

Пусть X — ***случайная величина*** (***с.в.***) на некотором вероятностном пространстве.

Пусть F — ***функция распределения*** (***ф.р.***) для X, т.е.

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть f — ***характеристическая функция*** (***х.ф.***) для X:

$$f(t) := \mathbb{E}e^{itX} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Безгранично делимые законы I.

С.в. X, ее ф.р. F и х.ф. f называются ***безгранично делимыми***, если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено любое из равенств (1)–(3):

$$X \stackrel{d}{=} X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n}, \tag{1}$$

где $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ — независимые одинаково распр.-ые с.в.;

$$F(x) = (F_n * \ldots * F_n)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

с некоторой ф.р. F_n;

$$f(t) = f_n(t)^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

с некоторыми х.ф. f_n.

Здесь $X_{n,j}$ имеют ф.р. F_n и х.ф. f_n при каждом $n \in \mathbb{N}$.

Безгранично делимые законы II.

Пусть X — безгранично делимая с.в. с ф.р. F и х.ф. f.
Тогда х.ф. f имеет ***представление Леви***:

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itu} - 1 - it\sin u\right) d\Lambda(u) \right\},\ t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — ***сдвиг***, $\sigma^2 \geqslant 0$ — ***гауссова компонента***, ***спектральная функция*** Λ **не убывает** на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, а также удовлетворяет условиям:

$$\lim_{u\to\pm\infty} \Lambda(u) = 0, \qquad \int\limits_{0<|u|<\delta} x^2\, d\Lambda(u) < +\infty, \quad \delta > 0.$$

Х.ф. только безгранично делимых законов допускают такое представление (со всеми условиями).

Соответствие между f (или F) и триплетами $(\gamma, \sigma^2, \Lambda)$ взаимно однозначно.

Безгранично делимые законы III.

Также х.ф. f безгранично делимой ф.р. F допускает ***представление Леви–Хинчина***:

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{itu} - 1 - it\sin u\right) \tfrac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — ***сдвиг***, ***спектральная функция*** G имеет ограниченную вариацию и **не убывает** на $(-\infty, +\infty)$, причем $G(-\infty) = 0$.

Х.ф. только безгранично делимых законов допускают такое представление (со всеми условиями).

Соответствие между f (или F) и парами (γ, G) взаимно однозначно.

С помощью $(\gamma, \sigma^2, \Lambda)$ и (γ, G) можно описывать **свойства** ф.р. F: *тип*, *гладкость*, *носитель и его крайние точки*, *унимодальность*, *тяжелохвостость* (в частности, *наличие моментов*), *принадлежность к важным классам законов* (устойчивым, саморазложимым и т.п.).

Безгранично делимые законы IV.

К концу XX века изучение класса безгранично делимых законов (и их многомерных аналогов) в целом подошло к своему завершению.

В этом направлении работали такие известные отечественные математики как **Хинчин**, **Колмогоров**, **Гнеденко**, **Золотарев**, **Линник**, **Ибрагимов**, **Петров** и многие зарубежные математики такие, как **Леви**, **де Финетти**, **Холл**, **Сато**, **Ямазато**, **Стойтель** и многие другие.

Безгранично делимые распределения применяются в ***теории случайных процессов***, ***стохастическом исчислении***, ***финансовой математике***, ***телекоммуникационных задачах*** и в других областях.

Здесь осталась не полностью решенной I_0***-проблема***, она относится ***теории разложений вероятностных законов***.

В этой теории встречаются законы, не являющиеся безгранично делимыми, но с подобным представлением х.ф. Лишь в 2011 г.они получили название:

КВАЗИБЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ ЗАКОНЫ.

Квазибезгранично делимые законы I.

С.в. X, ее ф.р. F и х.ф. f называются ***квазибезгранично делимыми***, если **v.1)** f допускает ***представление типа Леви***:

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itu} - 1 - it\sin u\right) d\Lambda(u)\right\}, \ t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geqslant 0$, функция Λ имеет **ограниченную вариацию** на $\mathbb{R} \setminus (-r, r)$, $r > 0$, а также удовлетворяет условиям:

$$\lim_{u\to\pm\infty} \Lambda(u) = 0, \qquad \int\limits_{0<|u|<\delta} x^2\, d|\Lambda|(u) < +\infty, \quad \delta > 0.$$

v.2) f допускает ***представление типа Леви–Хинчина***:

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{itu} - 1 - it\sin u\right) \tfrac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — ***сдвиг***, ***спектральная функция*** G имеет **ограниченную вариацию** на $(-\infty, +\infty)$, причем $G(-\infty) = 0$.

Квазибезгранично делимые законы II.

Соответствие между f (или F) и триплетами $(\gamma, \sigma^2, \Lambda)$ или парами (γ, G) взаимно однозначно.

По разложению Жордана верны представления:

$$\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2, \qquad G = G_1 - G_2,$$

где Λ_1 и Λ_2, G_1 и G_2 — неубывающие функции.

v.3) ф.р. F и х.ф. f ***квазибезгранично делимы*** в точности тогда, когда они ***рационально безгранично делимы***

$$F * F_2 = F_1, \qquad f(t) = f_1(t)/f_2(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где F_1 и F_2 — безгранично делимые ф.р. с х.ф. f_1 и f_2.

Первый детальный анализ класса квазибезгранично делимых законов был сделан в статье:

A. Lindner, L. Pan, K. Sato
On quasi-infinitely divisible distributions.
Transactions of AMS, 370 (2018), pp. 1–38.

Квазибезгранично делимые законы III.

Наиболее глубокие результаты этой статьи были получены для законов на $\mathbb{Z}$, т.е. с.в. $X = k \in \mathbb{Z}$ с вероятностью p_k:

Распределение с.в. X будет квазибезгранично делимым тогда и только тогда, когда $f(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. В таком случае

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \lambda_k (e^{itk} - 1)\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\lambda_k| < \infty$.

Квазибезгранично делимые законы III.

Наиболее глубокие результаты этой статьи были получены для законов на $\mathbb{Z}$, т.е. с.в. $X = k \in \mathbb{Z}$ с вероятностью p_k:

Распределение с.в. X будет квазибезгранично делимым тогда и только тогда, когда $f(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. В таком случае

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \lambda_k (e^{itk} - 1)\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\lambda_k| < \infty$.

Предельная теорема:

Пусть F и $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — квазибезгранично делимые ф.р. Пусть

$$F \sim \gamma \text{ и } (\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \qquad F_n \sim \gamma_n \text{ и } (\lambda_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится (слабо и по вариации) к F тогда и только тогда, когда $\gamma_n = \gamma$ при всех больших n и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\lambda_{n,k} - \lambda_k| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Результаты I.

Рассмотрим произвольные дискретные законы:

$$\mathbb{P}(X = x_k) = p_{x_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $x_k \in \mathbb{R}$, $p_{x_k} \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} = 1$.
Здесь х.ф. имеют вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} e^{itx_k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Распределение с.в. X будет квазибезгранично делимым, тогда и только тогда, когда

$$\exists c > 0 \quad |f(t)| \geqslant c > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I. A. Alexeev, A. A. Khartov, accepted in Bernoulli, 2021;
A. A. Khartov, Stat.& Prob. Letters, 185, 2022.

Ведется работа над критерием в терминах x_k и p_{x_k}.

Результаты II.

Существует интересный результат:

Пусть распределение имеет х.ф. f следующего вида:

$$f(t) = \delta f_d(t) + (1-\delta) f_{abs}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\delta \in (0,1]$, f_d — х.ф. некоторого дисертного закона, f_{abs} — х.ф. некоторого абсолютно непрерывного закона. Тогда распределение будет квазибезгранично делим, если и только если $f(t) \neq 0$ и $\exists c > 0 \ |f_d(t)| \geqslant c > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(D. Berger, M. Kutlu, ArXiv, 2022)

Случай $\delta = 0$ (абс. непр. распределение) не покрыт.

Получение критериев для распределений общего вида остается открытой задачей...

Результаты III.

Еще есть простое общее условие:

Закон распределения с.в. X будет квазибезгранично делимым, если $\mathbb{P}(X = a) > 1/2$ при некотором $a \in \mathbb{R}$.

Что будет в случае $\mathbb{P}(X = a) = 1/2$?

Рассмотрим случай, когда ф.р. F имеет следующий вид

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\,\mathbb{1}(x \geqslant 0) + \tfrac{1}{2}\,F_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где F_1 — некоторая ф.р. без скачка в нуле.

Здесь возможен случай $\inf_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = 0$.

Следующий результат получен совместно с Е. Воробьевой:
Пусть ф.р. F_1 растет на $[a, b]$, $a > 0$. Пусть $f(t) \neq 0$ при $t \in (-R, R)$, где $0 < R \leqslant \infty$. Тогда верно ***обобщенное представление Леви****:*

$$f(t) = \exp\Big\{\lim_{r\to\infty} \int_0^r \big(e^{itx} - 1\big)\,d\Lambda(x)\Big\}, \quad t \in (-R, R),$$

со спектральной функцией $\Lambda(x) := -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\big(1 - F_1^{*k}(x)\big)$.

Результаты IV.

Далее поговорим о применениях представлений квазибезгранично делимых законов к теоремам о слабой сходимости.

Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность квазибезгранично делимых ф.р. с соответствующей последовательностью х.ф.

$$f_n(t) = \exp\left\{it\gamma_n + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - it\sin x\right) \tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x)\right\},\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Задача: Получить критерии слабой сходимости $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в терминах пар (γ_n, G_n), $n \in \mathbb{N}$.

Результаты V.

Напоминание:

Пусть на нем задана случайная величина (с.в.) X и также целая последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

Определим для этих с.в. функции распределения (ф.р.):

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leqslant x), \quad \text{и} \quad F_n(x) := \mathbb{P}(X_n \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Слабая сходимость ф.р. F_n к ф.р. F (обозн. $F_n \xrightarrow{w} F$):

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, dF_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dF(x), \quad n \to \infty,$$

для любой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции h.

Она эквивалентна следующей ***сходимости в основном***:

$$F_n(x) \to F(x), \quad n \to \infty, \quad x \in \mathbf{C}(F).$$

На языке с.в. это «сходимость по распределению»: $X_n \xrightarrow{d} X$.

Результаты VI.

Любая ф.р. G является неубывающей ограниченной функцией, которая в каждой точке непрерывна справа, и дополнительно $G(-\infty) = 0$ и $G(+\infty) = 1$.

Введем в рассмотрение более общий класс функций.

Пусть $\boldsymbol{V}$ обозначает класс функций $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, которые непрерывны справа в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и удовлетворяют условию $G(-\infty) = 0$.

Для $G \in \boldsymbol{V}$ полная вариация на $\mathbb{R}$ будет обозначаться $\|G\|$, а полная вариация на $(-\infty, x]$ — как $|G|(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Имеем

$$|G(x)| \leqslant |G|(x) \leqslant \|G\|, \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{R},$$

и $|G|(+\infty) = \|G\|$.

Слабая сходимость G_n к G из класса $\boldsymbol{V}$ (обозн. $G_n \xrightarrow{w} G$):

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, dG_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dG(x), \quad n \to \infty,$$

для любой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции h.
Здесь *сходимость в основном* не является эквивалентом!

Результаты VII.

В указанной статье **A. Lindner, L. Pan, K. Sato, Trans. of AMS, 370 (2018)** были получены следующие результаты.

Теорема 1.
Если $\gamma_n \to \gamma$ *и* $G_n \xrightarrow{w} G$, $n \to \infty$, *с некоторыми* $\gamma \in \mathbb{R}$ *и* $G \in \boldsymbol{V}$, *то* (γ, G) *является спектральной парой для некоторой квазибезгранично делимой ф.р.* F, *и* $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$.

Теорема 2.
Пусть $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$, *где* F *— некоторая ф.р. Пусть* $(G_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ *удовлетворяет условиям*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|G_n^-\| < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \big(1 - |G_n^-|(r) + |G_n^-|(-r)\big) = 0$$

Тогда F *квазибезгранично делима с некоторой спектральной парой* (γ, G). *Более того,* $\gamma_n \to \gamma$ *и* $G_n \xrightarrow{w} G$, $n \to \infty$.

Слабую сходимость G_n хотелось бы заменить на более явную сходимость G_n, подобную **сходимости в основном**, введенную для ф.р.

Результаты VIII.

Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и функция G принадлежат классу $\boldsymbol{V}$.

Будем говорить, что $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***базово сходится*** (англ. *converges basically*) к функции G, и писать $G_n \Rightarrow G$, $n\to\infty$, если любая ее подпоследовательность содержит свою подпоследовательность $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такую, что

$$G_{n_k}(x_2) - G_{n_k}(x_1) \to G(x_2) - G(x_1), \quad k\to\infty,$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ кроме точек не более чем счетного множества, которое может зависеть от выбранных подпоследовательностей.

1) В классе ф.р. данная сходимость эквивалентна слабой сходимости.
2) В классе неубывающих ограниченных функций из $\boldsymbol{V}$ данная сходимость вместе с условием $G_n(+\infty)\to G(+\infty)$, $n\to\infty$, эквивалентна слабой сходимости.
3) В классе $\boldsymbol{V}$ данная сходимость вытекает из слабой сходимости, но не наоборот.

Результаты IX.

Пусть F_n, $n \in \mathbb{N}$, квазибезгранично делимые ф.р. с парами (γ_n, G_n), $n \in \mathbb{N}$.
Предположение:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|G_n\| = B < \infty. \tag{4}$$

Альтернативное предположение:

$$\varlimsup_{n\to\infty} G_n^-(+\infty) = M < \infty, \tag{5}$$

Теорема 3.
Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет* (4) *с некоторым* $B \geqslant 0$. *Пусть* $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$, *с некоторой* F. *Тогда* F *квазибезгранично делима с некоторой парой* (γ, G), *где* $\gamma \in \mathbb{R}$, $G \in \boldsymbol{V}$ *и* $\|G\| \leqslant B$. *Более того,* $\gamma_n \to \gamma$, $G_n \Rightarrow G$, *и* $G_n(+\infty) \to G(+\infty)$, $n \to \infty$.

Теорема 4.
Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет* (5) *с некоторым* $M \geqslant 0$. *Пусть* $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$, *с некоторой* F. *Тогда* (4) *выполнено с некоторым* $B \geqslant 0$ *и справедливы выводы теоремы 3.*

Результаты X.

Результаты в части достаточности:

Теорема 5
Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет* (4) *с некоторым* $B \geqslant 0$. *Если* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *относительно компактна и* $\gamma_n \to \gamma$, $G_n \Rightarrow G$, $n \to \infty$, *с некоторыми* $\gamma \in \mathbb{R}$ *и* $G \in \boldsymbol{V}$, *то* (γ, G) *является спектральной парой для некоторой квазибезгранично делимой ф.р.* F *и* $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$.

Теорема 6 *Пусть* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет* (5) *с некоторым* $M \geqslant 0$. *Если* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *относительно компактна и* $\gamma_n \to \gamma$, $G_n \Rightarrow G$, *и* $G_n(+\infty) \to G(+\infty)$, $n \to \infty$, *с некоторыми* $\gamma \in \mathbb{R}$ *и* $G \in \boldsymbol{V}$, *то справедливы все выводы теоремы 5.*

Из теорем 3–6 вытекает следующий **критерий**:

Теорема 7 *Пусть* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет* (4) *или* (5). *Пусть* F *квазибезгранично делимая ф.р. с парой* (γ, G), *где* $\gamma \in \mathbb{R}$ *и* $G \in \boldsymbol{V}$. *Тогда* $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$, *тогда и только тогда, когда* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *относительно компактна и выполнено* $\gamma_n \to \gamma$, $G_n \Rightarrow G$, *и* $G_n(+\infty) \to G(+\infty)$, $n \to \infty$.