Критерий квазибезграничной делимости для некоторого класса случайных векторов

Алексеев Иван Алексеевич
(совместная работа с А.А.Хартовым)

ПОМИ РАН, ИППИ РАН

10 ноября
Москва, 2022

Общие сведения

Пусть ξ – случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^d$, $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ – его функция распределения. Тогда характеристической функцией ξ называется функция

$$f(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t,\xi\rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь и далее, через $\langle x, y\rangle$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.
Цель работы – для дискретных случайных векторов получить спектральное представление для характеристической функции.

Представление Леви

Пусть f – характеристическая функция безгранично делимого закона. Тогда

$$f(t) = \exp\Big\{i\langle t,\gamma\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Qt,t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\big(e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - \tfrac{i\langle t,x\rangle}{1+\|x\|^2}\big)\nu(dx)\Big\},$$

где $t \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$, $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ – симметричная, положительно определенная матрица и ν – мера на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая двум условиям: $\nu(\{0\}) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min\{1, \|x\|^2\}\nu(dx) < \infty.$$

Квазибезгранично делимые случайные векторы

Определение через функции распределения

Функция распределения F называется квазибезгранично делимой, если существуют F_1, F_2 – безгранично делимые функции распределения такие, что
$$F_1 * F = F_2.$$

Квазибезгранично делимые случайные векторы

Определение через функции распределения

Функция распределения F называется квазибезгранично делимой, если существуют F_1, F_2 – безгранично делимые функции распределения такие, что

$$F_1 * F = F_2.$$

Определение через характеристические функции

Характеристическая функция f называется квазибезгранично делимой, если существуют f_1, f_2 – характеристические функции безгранично делимых распределений такие, что

$$f(t) = \frac{f_2(t)}{f_1(t)}, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Квазибезгранично делимые случайные векторы

Представление типа Леви

Пусть f – характеристическая функция безгранично делимого закона. Тогда

$$f(t) = \exp\left\{ i\langle t, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle Qt, t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+\|x\|^2}\right)\nu(dx)\right\},$$

где $t \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$, $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ – симметричная, положительно определенная матрица и ν – конечная знакопеременная мера на $\mathbb{R}^d \setminus (-r, r)^d$ для любого $r > 0$, удовлетворяющая двум условиям: $\nu(\{0\}) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min\{1, \|x\|^2\}|\nu|(dx) < \infty.$$

Библиография

D. Berger, M. Kutlu, A. Linder, *On multivariate quasi-infinitely divisible distributions*, A Lifetime of Excersions Through Random Walks and Lévy Processes. A Volume in Honour of Ron Doney's 80th Birthday. L. Chaumont, A.E. Kyprianou (eds.), Progress in Probability 78 (2021), Birkhäuser, 87–120.

D. Berger, A. Lindner, *A Cramér–Wold device for infinite divisibility of $\mathbb{Z}^d$-valued distributions*, Bernoulli, **28** (2022), (2), 1276–1283.

P. Passeggeri, *Spectral representation of quasi-infinitely divisible processes*, Stoch. Process. Appl., **130** (2020), Issue 3, 1735–1791.

Теорема(Бергер, Линднер, 2022)

Пусть F – функция распределения закона, сосредоточенного на $\mathbb{Z}^d$. Тогда F – квазибезгранично делима тогда и только тогда, когда $f(t) \neq 0$ для любого $t \in \mathbb{R}^d$, где f – характеристическая функция F. Более того, f имеет представление

$$f(t) = \exp\Big\{i\langle t, \gamma\rangle + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k\big(e^{i\langle t,k\rangle} - 1\big)\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\lambda_k| < \infty$.

Представление Леви – $Q = 0$, ν – конечная знакопеременная мера на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\nu(B) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\cap B} \lambda_k$ для любого борелевского множества B.

Дискретные законы

Рассмотрим многомерную дискретную функцию распределения

$$F(x) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ x_k\in(-\infty,x)}} p_{x_k}, \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Здесь $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k\in\mathbb{N}$ – различные вектора с вероятностными весами $p_{x_k} \geqslant 0$, $k\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} = 1$. Пусть f – характеристическая функция F. Тогда

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_{x_k} e^{i\langle t, x_k\rangle}, \quad t\in\mathbb{R}^d.$$

Для счетного множества $Y\subset\mathbb{C}^d$ через $\langle Y\rangle$ будем обозначать его $\mathbb{Z}^d$ модуль, то есть

$$\langle Y\rangle = \times_{j=1}^{d}\Big\{\sum_{k=1}^{n} z_k y_k^{(j)}:\ n\in\mathbb{N},\, z_k\in\mathbb{Z},\, y_k\in Y\Big\}.$$

Основная теорема

Теорема(Алексеев, Хартов, 2022)

Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ – дискретная функция распределения с характеристической функцией f. Тогда F – квазибезгранично делима тогда и только тогда, когда $|f(t)| \geqslant \mu > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$. Более того,

$$f(t) = \exp\left\{ i\langle t, \gamma\rangle + \sum_{u \in \langle X\rangle \setminus \{0\}} \lambda_u \left(e^{i\langle t,u\rangle} - 1\right) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^d, \qquad (1)$$

где $X = \{x_k : p_{x_k} > 0, k \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$, $\gamma \in \langle X\rangle$, $\lambda_u \in \mathbb{R}$ для всех $u \in \langle X\rangle \setminus \{0\}$ и $\sum_{u\in\langle X\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_u| < \infty$.

Представление Леви – $Q = 0$, ν – конечная знакопеременная мера на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\nu(B) = \sum_{u\in\langle X\rangle\cap B} \lambda_u$ для любого борелевского множества B.

Пусть функция $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ имеет следующее представление:

$$h(t) = \sum_{y \in Y} q_y e^{i\langle t, y\rangle}, \quad t \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

где $Y \subset \mathbb{R}^d$ – непустое, не более чем счетное множество, $q_y \in \mathbb{C}$ для всех $y \in Y$ и $0 < \sum_{y \in Y} |q_y| < \infty$. Предположим, что $h(0) = \sum_{y \in Y} q_y = 1$.

Теорема(Алексеев, Хартов, 2022)

Пусть функция $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ имеет представление (2). Тогда следующие утверждения равносильны:

(i) $\inf_{t\in\mathbb{R}^d} |h(t)| > 0;$

(ii) h имеет представление

$$h(t) = \exp\left\{ i\langle t,\gamma\rangle + \sum_{u\in\langle Y\rangle\setminus\{0\}} \lambda_u\big(e^{i\langle t,u\rangle} - 1\big)\right\}, \quad t\in\mathbb{R}^d,$$

где $\gamma\in\langle Y\rangle$, $\lambda_u \in \mathbb{C}$ для всех $u\in\langle Y\rangle\setminus\{0\}$ и $\sum_{u\in\langle Y\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_u| < \infty$.

Общая теорема. Необходимость

Теорема(Алексеев, Хартов, 2022)

Пусть функция $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ имеет представление (2). Тогда следующие утверждения равносильны:

(i) $\inf_{t\in\mathbb{R}^d} |h(t)| > 0$;

(ii) h имеет представление

$$\operatorname{Ln} h(t) = i\langle t,\gamma\rangle - \tfrac{1}{2}\langle t, Qt\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(e^{i\langle t,u\rangle} - 1 - \tfrac{i\langle t,u\rangle}{1+\|u\|^2}\Big)\nu(du),$$

где $t\in\mathbb{R}^d$, $\gamma\in\mathbb{C}^d$, $Q\in\mathbb{C}^{d\times d}$ – некоторая матрица, ν – комплекснозначный заряд на $\mathbb{R}^d$ такой, что

$$\nu(\{0\}) = 0, \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \min\{\|x\|^2, 1\}|\nu|(dx) < \infty.$$