Бинарная аддитивная задача с простыми числами специального вида

Доклад С.А. Гриценко, 07.11.2022, МИАН

Пусть $D(N)$— число простых чисел $p \leqslant N$ с условием

$$\{\frac{1}{2}\sqrt{p}\} \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

В 1940 году И.М. Виноградов доказал следующую теорему:

Theorem **1.**

$$D(N) = \frac{1}{2}\pi(N) + O(N^{1-0{,}1+\varepsilon}).$$

Назовем простые числа, удовлетворяющие (1), простыми Виноградова.

В моей кандидатской диссертации, выполненной под руководством А.А. Карацубы, была решена тернарная проблема Гольдбаха в простых Виноградова. Ее доказательство основано на оценке тригонометрической суммы

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i(\alpha p+\frac{1}{2}m\sqrt{p})}.$$

По той же схеме решаются и некоторые другие тернарные аддитивные задачи в простых числах Виноградова.

На мой взгляд, интересно было бы решить и бинарные аддитивные задачи с простыми Виноградова.

Мы вместе с аспирантом А.К. Эминяном сделали попытку решить проблему делителей Титчмарша в простых Виноградова.

Проблема делителей Титчмарша состоит в получении асимптотической формулы для числа решений уравнения

$$p - 1 = xy \tag{2}$$

в простых числах $p \leqslant n$ и произвольных натуральных числах x и y.

Впервые ее условное решение дал Е.К. Титчмарш в 1930 году, а позднее Ю.В. Линник получил безусловное решение.

Насколько нам известно, в простых Виноградова проблема делителей Титчмарша пока не решена.

Наш подход основан на одном варианте теоремы Бомбьери-Виноградова.

Сформулируем его. Пусть $\pi_V(n;1,k)$ — число простых Виноградова, не превосходящих n и сравнимых с 1 по модулю k.

Пусть ε_0 — сколь угодно малое положительное число, $\frac{1}{3} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}$.

Theorem **2.** *Пусть* $\xi = \frac{1}{3}$. *Для любого* $C > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k \leqslant n^{\xi - \varepsilon_0}} \left|\pi_V(n; 1, k) - \frac{Li\ n}{\varphi(k)}\right| \ll_{\varepsilon_0} \frac{n}{(\log n)^C},$$

где $Li\ n = \int_2^n \frac{dx}{\log x}$.

В 2013 году С.А. Гриценко и Н.А. Зинченко доказали эту теорему при $\xi = \frac{1}{3}$ и тем самым уточнили следующую теорему Д. Толева: On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set. // Acta Arithmetica, 1997. 81;1. P. 57-68, в которой вместо $\frac{1}{3}$ была константа $\frac{1}{4}$, Пусть $T(n)$ и $T_V(n)$ — число решений (2) в произвольных p и в простых Виноградова соответственно.

Заметим, что $T(n) \sim A_0 n$, где $A_0 = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}$.

Сформулируем наш основной результат.
Theorem **3.** *Пусть теорема 2 справедлива при некотором* $\xi \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$*. Тогда*

$$\{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - \xi + \varepsilon_0)\}T(n) \leqslant T_V(n) \leqslant \{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \xi + \varepsilon_0)\}T(n).$$

Если в теореме 3 взять $\xi = \frac{1}{3}$, неравенства будут иметь вид

$$\{\frac{1}{2} - (\frac{1}{6} + \varepsilon_0)\}T(n) \leqslant T_V(n) \leqslant \{\frac{1}{2} + (\frac{1}{6} + \varepsilon_0)\}T(n).$$

Недавно С.А. Гриценко и А.К. Эминян доказали, что теорема 2 справедлива при $\xi = \frac{2}{5}$ (этот результат еще не опубликован). С новой теоремой получаем неравенства

$$\{\frac{1}{2} - (\frac{1}{10} + \varepsilon_0)\}T(n) \leqslant T_V(n) \leqslant \{\frac{1}{2} + (\frac{1}{10} + \varepsilon_0)\}T(n).$$