Проблема делителей Карацубы и родственные задачи

В.В.Юделевич (совместно с М.Р.Габдуллиным и С.В.Конягиным)

МГУ им. М. В. Ломоносова

Москва, ноябрь 2022

Пусть $\tau(n)$ – число делителей n.

Задача (А. А. Карацуба, 2004)

Найти асимптотическую формулу для суммы

$$\Phi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)},$$

где суммирование ведётся по подряд идущим простым числам, не превосходящим x.

Формулировки проблем

Пусть $\tau(n)$ – число делителей n.

Задача (А. А. Карацуба, 2004)

Найти асимптотическую формулу для суммы

$$\Phi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)},$$

где суммирование ведётся по подряд идущим простым числам, не превосходящим x.

Задача

Найти асимптотическую формулу для суммы

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)}.$$

Справедлива следующая

Теорема (С. Рамануджан, 1916)

Имеет место равенство

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}=\frac{c_0x}{\sqrt{\log x}}+O\left(\frac{x}{(\log x)^{3/2}}\right),$$

где

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{p^2-p}\log\frac{p}{p-1}=0.54685\ldots$$

Проблема делителей Титчмарша

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Проблема делителей Титчмарша

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Положим $c_1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots$ и

$c_2 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(\gamma - \sum\limits_{p} \frac{\log p}{p^2 - p + 1} \right) = -0.06057\ldots$

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Положим $c_1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots$ и

$c_2 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(\gamma - \sum\limits_p \frac{\log p}{p^2-p+1} \right) = -0.06057\ldots$

- **Э.Ч.Титчмарш (1930):** $D(x) = O(x)$ и $D(x) \sim c_1 x$ при условии справедливости обобщённой гипотезы Римана.

Проблема делителей Титчмарша

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Положим $c_1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots$ и

$$c_2 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(\gamma - \sum_p \frac{\log p}{p^2 - p + 1} \right) = -0.06057\ldots$$

- **Э.Ч.Титчмарш (1930):** $D(x) = O(x)$ и $D(x) \sim c_1 x$ при условии справедливости обобщённой гипотезы Римана.
- **Ю.В.Линник (1961):** $D(x) = c_1 x + O\left(x (\log x)^{-\alpha}\right),\ 0 < \alpha < 1.$

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Положим $c_1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots$ и

$$c_2 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(\gamma - \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1} \right) = -0.06057\ldots$$

- **Э.Ч.Титчмарш (1930):** $D(x) = O(x)$ и $D(x) \sim c_1 x$ при условии справедливости обобщённой гипотезы Римана.
- **Ю.В.Линник (1961):** $D(x) = c_1 x + O\left(x(\log x)^{-\alpha}\right), \ 0 < \alpha < 1.$
- **Х.Халберстам (1967):** $D(x) = c_1 x + O(x \log\log x / \log x)$.

Проблема делителей Титчмарша

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Положим $c_1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots$ и

$$c_2 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(\gamma - \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1} \right) = -0.06057\ldots$$

- **Э.Ч.Титчмарш (1930):** $D(x) = O(x)$ и $D(x) \sim c_1 x$ при условии справедливости обобщённой гипотезы Римана.
- **Ю.В.Линник (1961):** $D(x) = c_1 x + O\left(x(\log x)^{-\alpha}\right), \ 0 < \alpha < 1.$
- **Х.Халберстам (1967):** $D(x) = c_1 x + O(x \log\log x / \log x).$
- **Э. Бомбьери, Х. Иванец, Дж. Фридлендер (1986):** $D(x) = c_1 x + 2c_2 Li(x) + O_A\left(x/(\ln x)^A\right)$ при любом фиксированном $A \geqslant 2$.

Проблема делителей Титчмарша

Задача о нахождении асимптотики для суммы $D(x) = \sum_{p \leqslant x} \tau(p-1)$ при $x \to +\infty$ называется **проблемой делителей Титчмарша**.

Положим $c_1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots$ и

$$c_2 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(\gamma - \sum_p \frac{\log p}{p^2 - p + 1} \right) = -0.06057\ldots$$

- **Э.Ч.Титчмарш (1930):** $D(x) = O(x)$ и $D(x) \sim c_1 x$ при условии справедливости обобщённой гипотезы Римана.
- **Ю.В.Линник (1961):** $D(x) = c_1 x + O\left(x(\log x)^{-\alpha}\right), \ 0 < \alpha < 1.$
- **Х.Халберстам (1967):** $D(x) = c_1 x + O(x \log\log x / \log x).$
- **Э. Бомбьери, Х. Иванец, Дж. Фридлендер (1986):** $D(x) = c_1 x + 2c_2 Li(x) + O_A\left(x/(\ln x)^A\right)$ при любом фиксированном $A \geqslant 2.$
- **M.Drapeau (2015):** $D(x) = c_1 x + 2c_2 Li(x) + O\left(x^{1-\delta}\right)$ для некоторого $\delta > 0$ при условии справедливости обобщённой гипотезы Римана.

Один результат Хооли

Сумма $H(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n^2 + 1)$ также изучалась ранее.

Сумма $H(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n^2 + 1)$ также изучалась ранее.

- **Метод гипербол + комплексное интегрирование:** $H(x) = \frac{3}{\pi} x \log x + O(x)$.

Один результат Хооли

Сумма $H(x)=\sum_{n\leqslant x}\tau(n^2+1)$ также изучалась ранее.

- **Метод гипербол + комплексное интегрирование:** $H(x)=\frac{3}{\pi}x\log x+O(x)$.
- **К.Хооли (1963):** $H(x)=\frac{3}{\pi}x\log x+cx+O(x^{8/9}(\log x)^3)$, где $c=\frac{3(\gamma-1)}{\pi}+2f'(1)$, $f(s)=\frac{L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)}$.

Проблема делителей Карацубы, что известно?

Положим $\mathcal{F}$ – класс неотрицательных мультипликативных функций, удовлетворяющих условиям:

- Найдётся постоянная $A_1 > 0$ такая, что для любой степени простого p^k выполнено $f(p^k) \leqslant A_1^k$;
- Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся константа $A_2(\varepsilon) > 0$ такая, что $f(n) \leqslant A_2(\varepsilon) n^{\varepsilon}$ для всех $n \geqslant 1$.

Проблема делителей Карацубы, что известно?

Положим $\mathcal{F}$ – класс неотрицательных мультипликативных функций, удовлетворяющих условиям:

- Найдётся постоянная $A_1 > 0$ такая, что для любой степени простого p^k выполнено $f(p^k) \leqslant A_1^k$;
- Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся константа $A_2(\varepsilon) > 0$ такая, что $f(n) \leqslant A_2(\varepsilon) n^{\varepsilon}$ для всех $n \geqslant 1$.

Справедлив следующий результат

Теорема (Pollack, 2019)

Пусть функция f принадлежит классу $\mathcal{F}$ и $0 < \beta < 1$. Тогда для любого $x \geqslant 3$ и $y \in (x^{\beta}, x\,]$ имеем

$$\sum_{\substack{x-y<p\leqslant x\\ p-\text{простое}}} f(p-1) \ll_{f,\beta} \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)-1}{p}\right).$$

Проблема делителей Карацубы, что известно?

Положим $\mathcal{F}$ – класс неотрицательных мультипликативных функций, удовлетворяющих условиям:

- Найдётся постоянная $A_1 > 0$ такая, что для любой степени простого p^k выполнено $f(p^k) \leqslant A_1^k$;
- Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся константа $A_2(\varepsilon) > 0$ такая, что $f(n) \leqslant A_2(\varepsilon) n^{\varepsilon}$ для всех $n \geqslant 1$.

Справедлив следующий результат

Теорема (Pollack, 2019)

Пусть функция f принадлежит классу $\mathcal{F}$ и $0 < \beta < 1$. Тогда для любого $x \geqslant 3$ и $y \in (x^{\beta}, x\ ]$ имеем

$$\sum_{\substack{x-y<p\leqslant x \\ p-\text{простое}}} f(p-1) \ll_{f,\beta} \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)-1}{p}\right).$$

Отсюда полагая $f(n) = 1/\tau(n)$, $\beta = 0.5$ и $y = x$, получим

$$\Phi(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)} \ll \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Проблема делителей Карацубы, что известно?

Оценка с более точной константой даётся следующей теоремой

Теорема (В.Ю., 2021)

Справедливо неравенство

$$\Phi(x) \leqslant \frac{4Kx}{(\log x)^{3/2}} + O\left(\frac{x \log\log x}{(\log x)^{5/2}}\right),$$

где

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}} \left(p \log \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right) = 0.2532\ldots$$

которая получается с помощью некоторой модификации решета Сельберга.

Проблема делителей Карацубы, что известно?

Оценка с более точной константой даётся следующей теоремой

Теорема (В.Ю., 2021)

Справедливо неравенство

$$\Phi(x) \leqslant \frac{4Kx}{(\log x)^{3/2}} + O\left(\frac{x \log\log x}{(\log x)^{5/2}}\right),$$

где

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}} \left(p \log \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right) = 0.2532\ldots$$

которая получается с помощью некоторой модификации решета Сельберга. Мы предполагаем, что при $x \to +\infty$ выполняется

$$\Phi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)} \sim \frac{Kx}{(\log x)^{3/2}}.$$

Мы дадим наброски доказательств следующих теорем.

Формулировка Результатов

Мы дадим наброски доказательств следующих теорем.

Теорема 1

Имеет место оценка

$$\Phi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Мы дадим наброски доказательств следующих теорем.

Теорема 1

Имеет место оценка

$$\Phi(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Теорема 2

Имеет место оценка

$$F(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} \asymp \frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

Доказательство Теоремы 1

Положим $p-1=ab$, где $P^+(a)\leqslant x^{1/40}$, $P^-(b)>x^{1/40}$, тогда

$$\Phi(x)=\sum_{\substack{a\leqslant x\\ P^+(a)\leqslant x^{1/40}}}\frac{1}{\tau(a)}\sum_{\substack{b\leqslant \frac{x}{a}\\ P^-(b)>x^{1/40}\\ ab+1-\text{простое}}}\frac{1}{\tau(b)}+O(1).$$

Положим $p-1=ab$, где $P^+(a)\leqslant x^{1/40}$, $P^-(b)>x^{1/40}$, тогда

$$\Phi(x)=\sum_{\substack{a\leqslant x\\ P^+(a)\leqslant x^{1/40}}}\frac{1}{\tau(a)}\sum_{\substack{b\leqslant\frac{x}{a}\\ P^-(b)>x^{1/40}\\ ab+1-\text{простое}}}\frac{1}{\tau(b)}+O(1).$$

Так как $P^-(b)>x^{1/40}$, то $\tau(b)\leqslant 2^{40}$, отсюда

$$\Phi(x)\geqslant 2^{-40}\sum_{\substack{a\leqslant x^{\frac{1}{40}}\\ a-\text{чётное}}}\frac{1}{\tau(a)}F_a(x),$$

где

$$F_a(x)=\#\left\{b\leqslant x/a : ab+1 \text{ – простое и } P^-(b)>x^{1/40}\right\}.$$

Доказательство Теоремы 1

Теперь остаётся оценить просеянную сумму $F_a(x)$.

Lemma

При $x \geqslant x_0$ *и некотором* $c_1 > 0$ *справедлива оценка:*

$$F_a(x) \geqslant \frac{c_1 \pi(x)}{\varphi(a) \log x} - R_1,$$

где

$$|R_1| \leqslant \sum_{d \leqslant x^{13/40}} |R(x; ad, 1)| + O\left(x^{13/40}\right)$$

и $R(x; q, a) = \pi(x; q, a) - \dfrac{\pi(x)}{\varphi(q)}$.

Доказательство леммы получается с помощью стандартного применения решета Бруна-Хооли.

Напомним некоторые обозначения, принятые в методах решета:
$\mathcal{A}$ – конечное подмножество натуральных чисел;
$\mathcal{P}$ – конечное подмножество простых чисел; $P = \prod_{p \in \mathcal{P}} p$;
$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \#\{a \in \mathcal{A} : (a, P) = 1\}$; $\mathcal{A}_d = \#\{a \in \mathcal{A} : a \equiv 0 \pmod d\}$.

Доказательство Теоремы 1, Лемма об $F_a(x)$

Напомним некоторые обозначения, принятые в методах решета:
$\mathcal{A}$ – конечное подмножество натуральных чисел;
$\mathcal{P}$ – конечное подмножество простых чисел; $P = \prod_{p \in \mathcal{P}} p$;
$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \#\{a \in \mathcal{A} : (a, P) = 1\}$; $\mathcal{A}_d = \#\{a \in \mathcal{A} : a \equiv 0 \pmod{d}\}$.
Будем предполагать, что при $d \mid P$ имеет место равенство

$$\mathcal{A}_d = Xg(d) + r_d, \tag{0.1}$$

где $g(d)$ — мультипликативная функция, для которой при $p \in \mathcal{P}$ выполнены неравенства

$$0 < g(p) < 1$$

и $g(p) = 0$ при $p \notin \mathcal{P}$.

Напомним некоторые обозначения, принятые в методах решета:
$\mathcal{A}$ – конечное подмножество натуральных чисел;
$\mathcal{P}$ – конечное подмножество простых чисел; $P = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} p$;
$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) = \#\{a\in\mathcal{A} : (a,P)=1\}$; $\mathcal{A}_d = \#\{a\in\mathcal{A} : a\equiv 0 \pmod d\}$.
Будем предполагать, что при $d\mid P$ имеет место равенство

$$\mathcal{A}_d = Xg(d) + r_d, \tag{0.1}$$

где $g(d)$ — мультипликативная функция, для которой при $p\in\mathcal{P}$ выполнены неравенства

$$0 < g(p) < 1$$

и $g(p)=0$ при $p\notin\mathcal{P}$.
Далее, пусть $\mathcal{P}$ разбито на не пересекающиеся подмножества $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\ldots,\mathcal{P}_t$, то есть

$$\mathcal{P} = \bigsqcup_{r=1}^{t}\mathcal{P}_r.$$

Положим $\{k_r\}_{r=1}^t$ — некоторая конечная последовательность чётных чисел;
$P_r = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}_r} p$; $V_r = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}_r}(1-g(p))$; $L_r = \log V_r^{-1}$;
$E = \sum\limits_{r=1}^{t}\dfrac{e^{L_r}(L_r)^{k_r+1}}{(k_r+1)!}$; $R = \sum\limits_{\substack{d_j\mid P_j\\ \omega(d_j)\leqslant k_j}} |r_{d_1\ldots d_t}|$; $R' = \sum\limits_{l=1}^{t}\sum\limits_{\substack{d_j\mid P_j\\ \omega(d_j)\leqslant k_j, j\neq l\\ \omega(d_l)=k_l+1}} |r_{d_1\ldots d_t}|$.

Справедлива следующая

Теорема (Форд-Халберстам)

Пусть выполнено равенство

$$\mathcal{A}_d = Xg(d) + r_d.$$

Тогда для величины $S(\mathcal{A},\mathcal{P})$ *имеют место оценки:*

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) \leqslant X \prod_{p\in\mathcal{P}} (1-g(p))e^E + R$$

и

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) \geqslant X \prod_{p\in\mathcal{P}} (1-g(p))(1-E) - R - R'.$$

Применим теорему Форда-Халберстама к множествам

$$\mathcal{A} = \{n \leqslant x/a : an + 1 - \text{простое}\}$$

и

$$\mathcal{P} = \{p \leqslant z\},$$

где $z = x^{1/40}$.

Применим теорему Форда-Халберстама к множествам

$$\mathcal{A} = \{n \leqslant x/a : an + 1 - \text{простое}\}$$

и

$$\mathcal{P} = \{p \leqslant z\},$$

где $z = x^{1/40}$. Тогда $F_a(x) = S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ и при $d|P = \prod_{p \leqslant z} p$ имеем

$$\mathcal{A}_d = \pi(x+1; ad, 1) = \frac{\pi(x)}{\varphi(ad)} + R(x; ad, 1) + O(1).$$

Отсюда находим $X = \frac{\pi(x)}{\varphi(a)}$, g – мультипликативная функция, определяемая на простых числах равенствами

$$g(p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{при } p \nmid a, \\ \frac{1}{p}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и

$$r_d = R(x; ad, 1) + O(1).$$

Кроме того, справедливо порядковое равенство

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p)) \asymp \frac{1}{\log x},$$

причём подразумеваемая постоянная абсолютна.
Выберем теперь разбиение $\mathcal{P}$ и определим числа $\{k_j\}_{j=1}^{t}$. Положим $z_j = z^{2^{1-j}}$ и

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P} \cap (z_{j+1}, z_j],$$

где t определяется из условия $z_{t+1} < 2 \leqslant z_t$. Пусть $k_j = b + 2(j-1)$, где $b \geqslant 2$ — чётное.

Кроме того, справедливо порядковое равенство

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p)) \asymp \frac{1}{\log x},$$

причём подразумеваемая постоянная абсолютна.

Выберем теперь разбиение $\mathcal{P}$ и определим числа $\{k_j\}_{j=1}^{t}$. Положим $z_j = z^{2^{1-j}}$ и

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}\cap(z_{j+1}, z_j],$$

где t определяется из условия $z_{t+1} < 2 \leqslant z_t$. Пусть $k_j = b + 2(j-1)$, где $b \geqslant 2$ — чётное. Так как при любом $z \geqslant \sqrt{2}$ верно неравенство

$$\prod_{z<p\leqslant z^2}(1-1/p)^{-1} \leqslant 3, \tag{0.2}$$

то

$$V_j^{-1} = \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j}(1-g(p))^{-1} \leqslant C \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j}(1-1/p)^{-1} \leqslant 3C \leqslant 5.$$

Кроме того, справедливо порядковое равенство

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p)) \asymp \frac{1}{\log x},$$

причём подразумеваемая постоянная абсолютна.
Выберем теперь разбиение $\mathcal{P}$ и определим числа $\{k_j\}_{j=1}^{t}$. Положим $z_j = z^{2^{1-j}}$ и

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P} \cap (z_{j+1}, z_j],$$

где t определяется из условия $z_{t+1} < 2 \leqslant z_t$. Пусть $k_j = b + 2(j-1)$, где $b \geqslant 2$ — чётное. Так как при любом $z \geqslant \sqrt{2}$ верно неравенство

$$\prod_{z<p\leqslant z^2}(1-1/p)^{-1} \leqslant 3, \qquad (0.2)$$

то

$$V_j^{-1} = \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j}(1-g(p))^{-1} \leqslant C \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j}(1-1/p)^{-1} \leqslant 3C \leqslant 5.$$

Тогда $L_j = \log V_j^{-1} \leqslant L = \log 5$ и

$$E = \sum_{j=1}^{t} \frac{e^{L_j} L_j^{k_j+1}}{(k_j+1)!} \leqslant \frac{e^L L^b \operatorname{sh} L}{(b+1)!} < 0.7$$

Нетрудно видеть, что

$$|R| + |R'| \leqslant \sum_{d \leqslant z^{2b+5}} |r_d|.$$

Возьмём теперь $b = 4$, тогда $2b + 5 = 13$, $E \leqslant 0.7$ и

$$|R| + |R'| \leqslant \sum_{d \leqslant x^{13/40}} |R(x; ad, 1)| + O\left(x^{13/40}\right).$$

Лемма доказана.

Из доказанной нами леммы находим

$$\Phi(x) \geqslant \frac{c_2 \pi(x)}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{\frac{1}{40}} \\ a - \text{чётное}}} \frac{1}{\tau(a)\varphi(a)} - R_2,$$

где $c_2 > 0$ и $|R_2| \leqslant \sum_{q \leqslant x^{7/20}} \tau(q)|R(x; q, 1)| + O(x^{17/20})$.

Из доказанной нами леммы находим

$$\Phi(x) \geqslant \frac{c_2 \pi(x)}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{\frac{1}{40}} \\ a - \text{чётное}}} \frac{1}{\tau(a)\varphi(a)} - R_2,$$

где $c_2 > 0$ и $|R_2| \leqslant \sum_{q \leqslant x^{7/20}} \tau(q)|R(x;q,1)| + O(x^{17/20})$.

Неравенство Коши + теорема Бомбьери-Виноградова:

$$|R_2| \leqslant \sqrt{x} \sqrt{\sum_{q \leqslant x^{0.35}} \frac{\tau^2(q)}{q}} \sqrt{\sum_{q \leqslant x^{0.35}} |R(x;q,1)|}$$

$$\ll_A \sqrt{x}(\log x)^2 \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^{\frac{A}{2}}} = \frac{x}{(\log x)^{\frac{A}{2}-2}}.$$

Отсюда выбирая $A = 24$, получим $|R_2| \ll \dfrac{x}{(\log x)^{10}}$.

Из доказанной нами леммы находим

$$\Phi(x) \geqslant \frac{c_2 \pi(x)}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{\frac{1}{40}} \\ a - \text{чётное}}} \frac{1}{\tau(a)\varphi(a)} - R_2,$$

где $c_2 > 0$ и $|R_2| \leqslant \sum_{q \leqslant x^{7/20}} \tau(q) |R(x; q, 1)| + O(x^{17/20})$.

Неравенство Коши + теорема Бомбьери-Виноградова:

$$|R_2| \leqslant \sqrt{x} \sqrt{\sum_{q \leqslant x^{0.35}} \frac{\tau^2(q)}{q}} \sqrt{\sum_{q \leqslant x^{0.35}} |R(x; q, 1)|}$$

$$\ll_A \sqrt{x} (\log x)^2 \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^{\frac{A}{2}}} = \frac{x}{(\log x)^{\frac{A}{2} - 2}}.$$

Отсюда выбирая $A = 24$, получим $|R_2| \ll \frac{x}{(\log x)^{10}}$. Так как

$$\sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a - \text{чётное}}} \frac{1}{\tau(a)\varphi(a)} \geqslant \frac{1}{4} \sum_{l \leqslant \frac{x^{1/40}}{2}} \frac{1}{\tau(l) l} \asymp \sqrt{\log x}, \text{ то } \Phi(x) \gg \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Сперва докажем нижнюю оценку. Пусть

$$\mathcal{M} = \left\{a \geqslant 1 : a \mid n^2 + 1 \text{ для некоторого } n \geqslant 1\right\}.$$

При $z = x^{1/40}$ имеем

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} = \sum\sum_{\substack{ab=n^2+1,\, n\leqslant x \\ P^+(a)\leqslant z,\, P^-(b)>z}} \frac{1}{\tau(ab)}.$$

Сперва докажем нижнюю оценку. Пусть

$$\mathcal{M} = \left\{a \geqslant 1 : a \mid n^2 + 1 \text{ для некоторого } n \geqslant 1\right\}.$$

При $z = x^{1/40}$ имеем

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} = \sum\sum_{\substack{ab=n^2+1,\, n\leqslant x \\ P^+(a)\leqslant z,\, P^-(b)>z}} \frac{1}{\tau(ab)}.$$

Тогда $\tau(b) \leqslant 2^{80}$ и

$$F(x) \geqslant 2^{-80} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{\tau(a)} W_a\left(x, x^{1/40}\right), \tag{0.3}$$

где

$$W_a(x,z) = \#\left\{n \leqslant x : a|(n^2+1) \text{ и } P^-\left(\frac{n^2+1}{a}\right) > z\right\}.$$

Как и выше, путём применения решета Бруна-Хооли, получим

$$W_a(x,z) \asymp \frac{2^{\omega(a)}}{\varphi(a)} \frac{x}{\log z}.$$

Как и выше, путём применения решета Бруна-Хооли, получим

$$W_a(x,z) \asymp \frac{2^{\omega(a)}}{\varphi(a)}\frac{x}{\log z}.$$

Отсюда находим

$$F(x) \gg \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{2^{\omega(a)}}{\tau(a)\varphi(a)}$$

$$\geqslant \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \in \mathcal{M} \\ a - \text{ бесквадратное}}} \frac{1}{a} = \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{a} \sum_{\delta^2 | a} \mu(\delta).$$

Меняя порядок суммирования и используя равенство $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, получаем

$$F(x) \gg \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{\delta \leqslant x^{1/80} \\ \delta \in \mathcal{M}}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40}\delta^{-2} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{a} \geqslant \left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{a}.$$

Меняя порядок суммирования и используя равенство $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, получаем

$$F(x) \gg \frac{x}{\log x}\sum_{\substack{\delta\leqslant x^{1/80}\\ \delta\in\mathcal{M}}}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/40}\delta^{-2}\\ a\in\mathcal{M}}}\frac{1}{a} \geqslant \left(2-\frac{\pi^2}{6}\right)\frac{x}{\log x}\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/40}\\ a\in\mathcal{M}}}\frac{1}{a}.$$

Как известно, при $Y\geqslant 2$ справедливо

$$\#\{a\leqslant Y : p|a \Rightarrow p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)\} \asymp Y/\sqrt{\log Y},$$

отсюда применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{\substack{a\leqslant Y\\ p|a\Rightarrow p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\frac{1}{a} \asymp \sqrt{\log Y}.$$

Тем самым мы получаем $F(x)\gg x/\sqrt{\log x}$, что и требовалось.

Справедлива следующая теорема

Theorem (M. B. Barban, P. P. Vekhov, 1969)

Пусть $f(n)$ – мультипликативная функция, такая что $f(n) \geqslant 0$ и для любого простого p и целого $k \geqslant 1$ выполнено $f(p^k) \ll k^{c_1}$. Далее, пусть $g(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i x^i$ – неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен, такой что $(a_1, a_2, \ldots, a_l) = 1$ и $|a_i| \ll x^{c_2}$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} f(g(n)) \ll x(\log \omega(D))^{c_3} \exp\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)(f(p)-1)}{p}\right).$$

Здесь $c_1, c_2, c_3 > 0$, D– дискриминант $g(x)$, а $L(n)$ – число решений сравнения $g(m) \equiv 0 \pmod{n}, 0 \leqslant m < n$.

При $f(n) = \dfrac{1}{\tau(n)}$ и $g(n) = n^2 + 1$ находим

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} \ll \frac{x}{\sqrt{\log x}}$$

Теорема доказана.

Дальнейшие результаты

Пусть $A > 0$ – некоторая величина. Определим класс мультипликативных функций $\mathcal{M}_A$, удовлетворяющих следующим двум свойствам:

- Для любого простого p и любого целого $\alpha \geqslant 1$ выполнено $0 < f(p^\alpha) = c_\alpha \leqslant cA^\alpha, c > 0$;
- Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $c(\varepsilon) > 0$ такая что $f(n) \leqslant c(\varepsilon)n^\varepsilon$.

Действуя также, как и выше, можно доказать следующие результаты. Пусть $f \in \mathcal{M}_A$, тогда

1. $$\sum_{p \leqslant x} f(p-1) \asymp_{f,A} x(\log x)^{f(2)-1}, \quad 0 < A \leqslant \sqrt{2};$$
2. $$\sum_{n \leqslant x} f(n-1)\omega(n) \asymp_{f,A} x(\log x)^{f(2)-1} \log\log x, \quad 0 < A < 2;$$
3. $$\sum_{n \leqslant x} f(n-1)\tau(n) \asymp_{f,A} x(\log x)^{f(2)}, \quad 0 < A < 2;$$

Полагая в третьей формуле $f(n) = \dfrac{1}{\tau(n)}$, получим

Theorem (F. Luca, I. E. Shparlinski, 2007)

Имеет место равенство

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau(n+1)}{\tau(n)} \asymp x\sqrt{\log x}$$

Более точный результат был получен М. А. Королёвым

Теорема (M. A. Korolev, 2010)

Имеет место равенство

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau(n+1)}{\tau(n)} = Kx\sqrt{\log x} + O(x\log\log x),$$

где

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_{p}\left(\frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} + \sqrt{1-\frac{1}{p}}(p-1)\log\frac{p}{p-1}\right) = 0.75782\ldots$$

Мы дадим набросок доказательства третьей формулы при $f(n)=\dfrac{1}{\tau(n)}$. Общий результат получается также.

Так как

$$\tau(n)=2\sum_{d|n,d<\sqrt{n}}1+\mathbb{I}_{n=k^2},$$

то

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{\tau(n-1)}=2\sum_{d<\sqrt{x}}\sum_{\substack{d^2<n\leqslant x\\ n\equiv 1 \pmod d}}\frac{1}{\tau(n)}+O(\sqrt{x})$$

$$=2\sum_{d<\sqrt{x}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 1 \pmod d}}\frac{1}{\tau(n)}+O(x).$$

Согласно теореме Шиу

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 1 \pmod d}}\frac{1}{\tau(n)}\ll\frac{x}{\varphi(d)}\frac{1}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p\tau(p)}\right)\ll\frac{x}{\sqrt{\log x}}\frac{1}{\varphi(d)},$$

отсюда

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{\tau(n-1)}\ll\frac{x}{\sqrt{\log x}}\sum_{d<\sqrt{x}}\frac{1}{\varphi(d)}\ll x\sqrt{\log x}.$$

Итак, верхняя оценка доказана. Докажем нижнюю оценку. Имеем

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{\tau(n-1)} \geqslant 2\sum_{d<\sqrt{x}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 1 \pmod d}}\frac{1}{\tau(n)}$$

$$\gg \sum_{d<\sqrt{x}}\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/40}\\ (a,d)=1}}\frac{1}{\tau(a)}\sum_{\substack{b\leqslant x/a\\ b\equiv a^{-1} \pmod d\\ P^-(b)>x^{1/40}}} 1$$

Из Теоремы Форда-Халберстама находим

$$\sum_{\substack{b\leqslant x/a\\ b\equiv a^{-1} \pmod d\\ P^-(b)>x^{1/40}}} 1 \gg \frac{x}{\log x}\frac{1}{\varphi(ad)} - (\text{Мелкие слагаемые}).$$

Отсюда находим

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{\tau(n-1)} \gg \frac{x}{\log x}\sum_{d<\sqrt{x}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/40}\\(a,d)=1}}\frac{1}{\tau(a)\varphi(a)}$$

$$\gg \frac{x}{\sqrt{\log x}}\sum_{d<\sqrt{x}}\frac{1}{d} \gg x\sqrt{\log x}.$$

Что и требовалось.

Спасибо за внимание !