Циклические симметрии многомерных цепных дробей

Тлюстангелов Ибрагим

Вторая конференция Математических центров России, 7-11 ноября 2022 г.

Геометрическая цепная дробь по Клейну

Геометрическая цепная дробь по Клейну

- Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$.

Геометрическая цепная дробь по Клейну

- Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$.
- Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через
$$\mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n).$$
Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

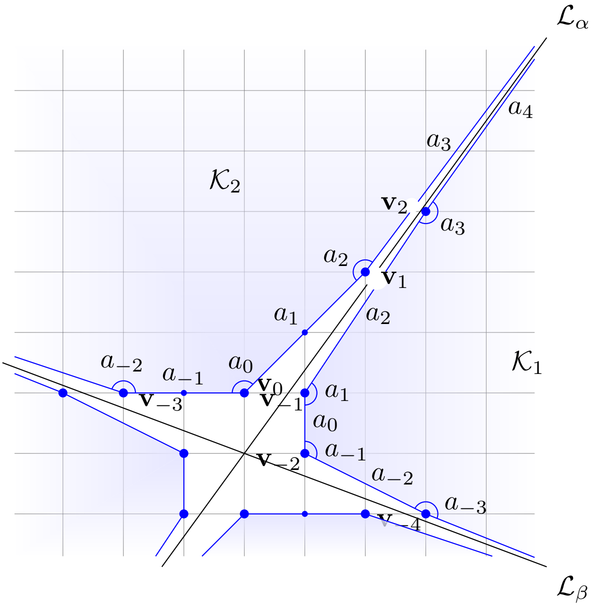
Геометрическая цепная дробь по Клейну

- Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$.
- Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через
$$\mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n).$$
Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

Определение 1

Пусть C — иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{K}(C) = \operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{K}(C))$ называются соответственно *полиэдром Клейна* и *парусом Клейна*, соответствующими конусу C. Объединение же всех 2^n парусов
$$\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)} \partial(\mathcal{K}(C))$$
называется $(n-1)$*-мерной цепной дробью*.

Связь с обыкновенными цепными дробями при $n = 2$



Алгебраические цепные дроби

Алгебраические цепные дроби

- Классическая теорема Лагранжа о цепных дробях утверждает, что число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда цепная дробь числа α периодична начиная с некоторого момента.

Алгебраические цепные дроби

- Классическая теорема Лагранжа о цепных дробях утверждает, что число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда цепная дробь числа α периодична начиная с некоторого момента.
- Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа основывается на том факте, что вектор $(1, \alpha)$ является собственным вектором некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями в том и только том случае, если число α — квадратичная иррациональность.

Алгебраические цепные дроби

- Классическая теорема Лагранжа о цепных дробях утверждает, что число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда цепная дробь числа α периодична начиная с некоторого момента.
- Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа основывается на том факте, что вектор $(1, \alpha)$ является собственным вектором некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями в том и только том случае, если число α — квадратичная иррациональность.
- Данное утверждение обобщается естественным образом на случай произвольного n. Напомним, что оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим*.

Алгебраические цепные дроби

- Классическая теорема Лагранжа о цепных дробях утверждает, что число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда цепная дробь числа α периодична начиная с некоторого момента.
- Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа основывается на том факте, что вектор $(1, \alpha)$ является собственным вектором некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями в том и только том случае, если число α — квадратичная иррациональность.
- Данное утверждение обобщается естественным образом на случай произвольного n. Напомним, что оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим*.

Определение 2

Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n-1)$-мерная цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ называется *алгебраической*. Мы будем также говорить, что эта дробь *ассоциирована* с оператором A и писать $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Обобщение теоремы Лагранжа и симметрии цепной дроби

Обобщение теоремы Лагранжа и симметрии цепной дроби

- Упомянутое на предыдущем слайде обобщение выглядит следующим образом:

Обобщение теоремы Лагранжа и симметрии цепной дроби

- Упомянутое на предыдущем слайде обобщение выглядит следующим образом:

Предложение 1

Числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A.

Обобщение теоремы Лагранжа и симметрии цепной дроби

- Упомянутое на предыдущем слайде обобщение выглядит следующим образом:

Предложение 1

Числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A.

- Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \Big\{G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \,\Big|\, G\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \mathrm{CF}(A)\Big\}.$$

Обобщение теоремы Лагранжа и симметрии цепной дроби

- Упомянутое на предыдущем слайде обобщение выглядит следующим образом:

Предложение 1

Числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A.

- Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \Big\{G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \,\Big|\, G\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \mathrm{CF}(A)\Big\}.$$

- Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ однозначно определена перестановка σ_G, такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Обобщение теоремы Лагранжа и симметрии цепной дроби

- Упомянутое на предыдущем слайде обобщение выглядит следующим образом:

Предложение 1

Числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют собственный базис оператора A.

- Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \Big\{G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ \Big| \ G\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \mathrm{CF}(A)\Big\}.$$

- Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ однозначно определена перестановка σ_G, такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

- И обратно, если для $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G, что выполняются соотношения 1, то $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$.

Виды симметрий цепной дроби

Виды симметрий цепной дроби

Определение 3

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, такой что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

Виды симметрий цепной дроби

Определение 3

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, такой что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

Определение 4

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $\mathrm{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромичной*.

Виды симметрий цепной дроби

Определение 3

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, такой что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

Определение 4

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $\mathrm{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромичной*.

Определение 5

Симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *циклической*, если σ_G — циклическая перестановка.

Виды симметрий цепной дроби

Определение 3

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, такой что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

Определение 4

Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $\mathrm{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромичной*.

Определение 5

Симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *циклической*, если σ_G — циклическая перестановка.

Определение 6

Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *собственной*, если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющаяся собственной, называется *несобственной*.

Известные свойства симметрий цепных дробей

Известные свойства симметрий цепных дробей

- Пусть $\partial(\mathcal{K}(C))$ — один из 2^n парусов цепной дроби CF(A). Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах все симметрии Дирихле цепной дроби CF(A) образуют группу, и у этой группы есть подгруппа, относительно действия которой на парусе $\partial(\mathcal{K}(C))$ возникает компактная фундаментальная область. Таким образом можно говорить о *периоде* паруса $\partial(\mathcal{K}(C))$.

Известные свойства симметрий цепных дробей

- Пусть $\partial(\mathcal{K}(C))$ — один из 2^n парусов цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах все симметрии Дирихле цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$ образуют группу, и у этой группы есть подгруппа, относительно действия которой на парусе $\partial(\mathcal{K}(C))$ возникает компактная фундаментальная область. Таким образом можно говорить о *периоде* паруса $\partial(\mathcal{K}(C))$.
- Для $n = 2$, то есть для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа, Лежандра, Перрона и Крайтчика.

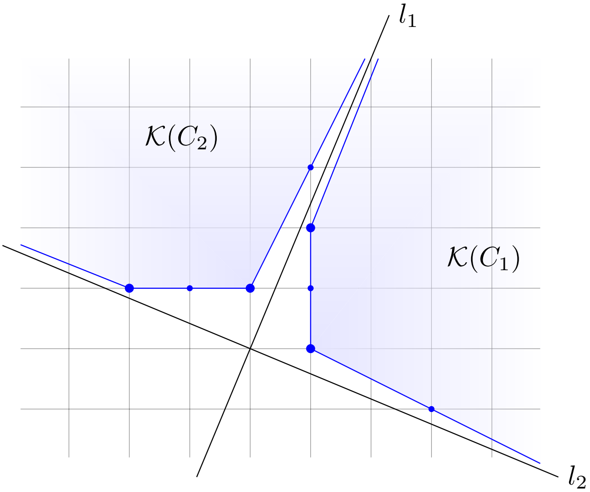
Известные свойства симметрий цепных дробей

- Пусть $\partial(\mathcal{K}(C))$ — один из 2^n парусов цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах все симметрии Дирихле цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$ образуют группу, и у этой группы есть подгруппа, относительно действия которой на парусе $\partial(\mathcal{K}(C))$ возникает компактная фундаментальная область. Таким образом можно говорить о *периоде* паруса $\partial(\mathcal{K}(C))$.
- Для $n = 2$, то есть для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа, Лежандра, Перрона и Крайтчика.
- В работе Германа и Тлюстангелова (2016) дано геометрическое доказательство этого критерия. При этом приходится рассматривать как собственные, так и несобственные симметрии.

Известные свойства симметрий цепных дробей

- Пусть $\partial(\mathcal{K}(C))$ — один из 2^n парусов цепной дроби CF(A). Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах все симметрии Дирихле цепной дроби CF(A) образуют группу, и у этой группы есть подгруппа, относительно действия которой на парусе $\partial(\mathcal{K}(C))$ возникает компактная фундаментальная область. Таким образом можно говорить о *периоде* паруса $\partial(\mathcal{K}(C))$.
- Для $n = 2$, то есть для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа, Лежандра, Перрона и Крайтчика.
- В работе Германа и Тлюстангелова (2016) дано геометрическое доказательство этого критерия. При этом приходится рассматривать как собственные, так и несобственные симметрии.
- Однако, при $n = 3$ любая палиндромичная цепная дробь обладает собственной циклической симметрией (см. работу Германа и Тлюстангелова (2021)).

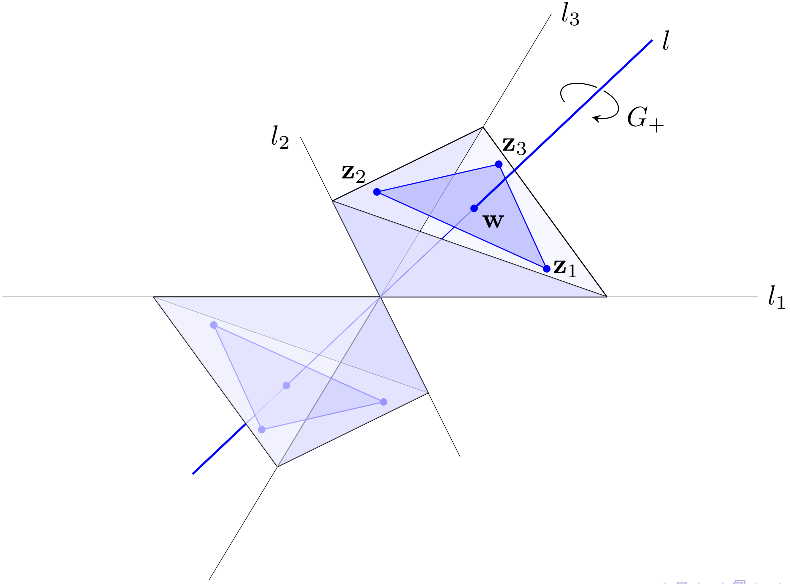
Несобственная симметрия в случае $n = 2$



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}(C_1) = \mathcal{K}(C_2)$$

Рис.: Палиндромическая симметрия, не сохраняющая никакой из конусов ($n = 2$). Период равен $(1, 2, 2, 1)$.

Собственная симметрия любой палиндромичной цепной дроби в случае $n = 3$



Собственные циклические симметрии при $n = 2$ и $n = 3$

Собственные циклические симметрии при $n = 2$ и $n = 3$

Предложение 2

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha)$. Тогда $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряжённым ω', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega):\qquad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0;$

(б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega):\qquad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1.$

Собственные циклические симметрии при $n = 2$ и $n = 3$

Предложение 2

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha)$. Тогда $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряжённым ω', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \qquad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0;$

(б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \qquad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1.$

Предложение 3

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta)$. Тогда $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 3 со своими сопряжёнными ω' и ω'', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \qquad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0;$

(б) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \qquad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 1.$

При выполнении утверждения (а) или (б) кубическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ будет нормальным.

Собственные циклические симметрии при $n = 2$ и $n = 3$

Предложение 2

Пусть $\mathsf{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha)$. Тогда $\mathsf{CF}(l_1, l_2)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряжённым ω', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega)$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0$;

(б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega)$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1$.

Предложение 3

Пусть $\mathsf{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta)$. Тогда $\mathsf{CF}(l_1, l_2, l_3)$ имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 3 со своими сопряжёнными ω' и ω'', что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega')$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0$;

(б) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega')$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 1$.

При выполнении утверждения (а) или (б) кубическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ будет нормальным.

- В этих формулировках $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ для векторов из $\mathbb{R}^n$ означает существование такого оператора $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такого ненулевого $\mu \in \mathbb{R}$, что $X\mathbf{v}_1 = \mu\mathbf{v}_2$.

Существование цепных дробей с собственными циклическими симметриями в случае произвольного n

Существование цепных дробей с собственными циклическими симметриями в случае произвольного n

Теорема 1

Для любого целого $n > 1$ существует $(n-1)$-мерная цепная дробь CF(A), обладающая собственной циклической палиндромической симметрией.

Критерий того, что циклическая симметрия является собственной симметрией

Критерий того, что циклическая симметрия является собственной симметрией

- Рассмотрим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Критерий того, что циклическая симметрия является собственной симметрией

- Рассмотрим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Лемма 1

Пусть G — циклическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n) \in \mathfrak{A}_{n-1}$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n$ имеет вид 2. Тогда G является собственной циклической симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n)$ в том и только том случае, если $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = 1$.

Доказательство леммы 1

Доказательство леммы 1

- Пусть G является собственной циклической симметрией дроби CF$(l_1, \ldots, l_n)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1 \mathbf{l}_1, \varepsilon_2 \mathbf{l}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{l}_n) = \big(\mu_n \varepsilon_1 \mathbf{l}_n, \mu_1 \varepsilon_2 \mathbf{l}_1, \mu_2 \varepsilon_3 \mathbf{l}_2, \ldots, \mu_{n-1} \varepsilon_n \mathbf{l}_{n-1}\big),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > 0,\ \ \mu_2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} > 0,\ \ \ldots,\ \ \mu_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} > 0,\ \ \mu_n \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_n} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n > 0$, а значит $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = 1$.

Доказательство леммы 1

- Пусть G является собственной циклической симметрией дроби CF$(l_1, \ldots, l_n)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1 \mathbf{l}_1, \varepsilon_2 \mathbf{l}_2, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{l}_n) = \big(\mu_n \varepsilon_1 \mathbf{l}_n, \mu_1 \varepsilon_2 \mathbf{l}_1, \mu_2 \varepsilon_3 \mathbf{l}_2, \ldots, \mu_{n-1} \varepsilon_n \mathbf{l}_{n-1}\big),$$

  и выполняются неравенства

$$\mu_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > 0, \ \mu_2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} > 0, \ \ldots, \ \mu_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} > 0, \ \mu_n \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_n} > 0.$$

  Стало быть, $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n > 0$, а значит $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = 1$.
- Если $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = 1$, то оператор G имеет собственное направление, которое соответствует собственному значению 1 и лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$.

Необходимые обозначения и допущения

Необходимые обозначения и допущения

- Здесь и далее будем обозначать через $\mathrm{N}(\alpha)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)$ соответственно норму $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ и след $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ алгебраического числа α.

Необходимые обозначения и допущения

- Здесь и далее будем обозначать через $\mathrm{N}(\alpha)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)$ соответственно норму $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ и след $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ алгебраического числа α.
- Если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1).

Необходимые обозначения и допущения

- Здесь и далее будем обозначать через $\mathrm{N}(\alpha)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)$ соответственно норму $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ и след $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ алгебраического числа α.
- Если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1).
- Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$.

Необходимые обозначения и допущения

- Здесь и далее будем обозначать через $\mathrm{N}(\alpha)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)$ соответственно норму $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ и след $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ алгебраического числа α.
- Если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)=\mathrm{CF}(A)\in\mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1=(1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1).
- Тогда из предложения 1 следует, что числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i=(1,\sigma_i(\alpha_1),\ldots,\sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1(=\mathrm{id}),\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$.
- Мы будем обозначать через $\mathfrak{A}'_{n-1}$ множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей, для которых поле K из предложения 1 — вполне вещественное циклическое расширение Галуа.

Необходимые обозначения и допущения

Необходимые обозначения и допущения

- Пусть σ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбираем такую нумерацию прямых $l_1, \ldots, l_n$, что если через $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n$, то получим

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_2 & \sigma(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_2) & \sigma^{n-1}(\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \sigma(\alpha_{n-1}) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_{n-1}) & \sigma^{n-1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Необходимые обозначения и допущения

- Пусть σ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбираем такую нумерацию прямых $l_1, \ldots, l_n$, что если через $\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n\big)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n$, то получим

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_2 & \sigma(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_2) & \sigma^{n-1}(\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \sigma(\alpha_{n-1}) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_{n-1}) & \sigma^{n-1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

- Определим следующий класс $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей:

$$\mathbf{CF} = \Big\{ \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{A}'_{n-1} \,\Big|\, \alpha_j = \prod_{k=0}^{j-1} \sigma^k(\alpha_1),\ \ \mathrm{N}(\alpha_1) = 1 \Big\}.$$

Необходимые обозначения и допущения

- Пусть σ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбираем такую нумерацию прямых $l_1, \ldots, l_n$, что если через $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n$, то получим

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_2 & \sigma(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_2) & \sigma^{n-1}(\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \sigma(\alpha_{n-1}) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_{n-1}) & \sigma^{n-1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

- Определим следующий класс $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей:

$$\mathbf{CF} = \Big\{ \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{A}'_{n-1} \,\Big|\, \alpha_j = \prod_{k=0}^{j-1} \sigma^k(\alpha_1), \;\; \mathrm{N}(\alpha_1) = 1 \Big\}.$$

- Положим

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма о палиндромичности цепных дробей из $\mathbf{CF}$

Лемма о палиндромичности цепных дробей из $\mathbf{CF}$

Лемма 2

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)\in\mathfrak{A}_{n-1}$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:
(а) $\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)$ принадлежит классу $\mathbf{CF}$;
(б) H — собственная палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n)$ и

$$\sigma_H=(1,2,\ldots,n-1,n).$$

Лемма о палиндромичности цепных дробей из $\mathbf{CF}$

Лемма 2

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{A}_{n-1}$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:
(а) $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ принадлежит классу $\mathbf{CF}$;
(б) H — собственная палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ и

$$\sigma_H = (1, 2, \ldots, n-1, n).$$

- *Доказательство.* В силу леммы 1 оператор $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ является собственной палиндромической симметрией $\mathrm{CF}(A)$ и $\sigma_H = (1, 2, \ldots, n-1, n)$ тогда и только тогда, когда существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, что $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = 1$ и

$$H(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) = (\mu_2 \mathbf{l}_2, \mu_3 \mathbf{l}_3, \ldots, \mu_n \mathbf{l}_n, \mu_1 \mathbf{l}_1). \tag{3}$$

Доказательство леммы 2

Доказательство леммы 2

- Пусть $\mathsf{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{CF}$. Тогда

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_1\sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_1)\sigma^2(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1)\sigma^{n-1}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1)\alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \prod\limits_{k=1}^{j-1} \sigma^{k-1}(\alpha_1) & \prod\limits_{k=2}^{(j-1)+1} \sigma^{k-1}(\alpha_1) & \ldots & \prod\limits_{k=n-1}^{(j-1)+n-2} \sigma^{k-1}(\alpha_1) & \prod\limits_{k=n}^{(j-1)+n-1} \sigma^{k-1}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы 2

- Пусть $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{CF}$. Тогда

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_1\sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_1)\sigma^2(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1)\sigma^{n-1}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1)\alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \prod\limits_{k=1}^{j-1} \sigma^{k-1}(\alpha_1) & \prod\limits_{k=2}^{(j-1)+1} \sigma^{k-1}(\alpha_1) & \ldots & \prod\limits_{k=n-1}^{(j-1)+n-2} \sigma^{k-1}(\alpha_1) & \prod\limits_{k=n}^{(j-1)+n-1} \sigma^{k-1}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

- То есть,

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) = (a_{ji}),$$

где $a_{ji} = \prod\limits_{k=i}^{(j-1)+i-1} \sigma^{k-1}(\alpha_1)$ при $j = 2, \ldots, n$ и $a_{1i} = 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Стало быть,

$$H(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n) = (\alpha_1 \mathbf{l}_2, \sigma(\alpha_1)\mathbf{l}_3, \ldots, \sigma^{n-2}(\alpha_1)\mathbf{l}_n, \sigma^{n-1}(\alpha_1)\mathbf{l}_1).$$

Следовательно, H — собственная палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ и $\sigma_H = (1, 2, \ldots, n-1, n)$.

Доказательство леммы 2

Доказательство леммы 2

- Обратно, предположим, H — собственная палиндромическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ и $\sigma_H = (1, 2, \ldots, n-1, n)$. Тогда, поскольку выполняется соотношение 3, имеем

$$H\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha_1) \\ \ldots \\ \sigma_2(\alpha_{n-2}) \\ \sigma_2(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = \alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)$, $\alpha_3 = \alpha_1\sigma_2(\alpha_2) = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)\sigma_2^2(\alpha_1)$, ..., $\alpha_{n-1} = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)\cdots\sigma_2^{n-2}(\alpha_1)$, $1 = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)\cdots\sigma_2^{n-1}(\alpha_1)$.

Доказательство леммы 2

Доказательство леммы 2

- Для любого $i = 2, \ldots, n-1$, в силу соотношения 3, имеем

$$H\mathbf{l}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i(\alpha_1) \\ \sigma_i(\alpha_2) \\ \ldots \\ \sigma_i(\alpha_{n-1}) \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_{i+1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_{i+1}(\alpha_1) \\ \ldots \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-2}) \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_{i+1} = \sigma_i(\alpha_1)$ и

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1}(\alpha_1) &= \frac{\sigma_i(\alpha_2)}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_1)), \\ \sigma_{i+1}(\alpha_2) &= \frac{\sigma_i(\alpha_3)}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_2)), \\ &\ldots, \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) &= \frac{1}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_{n-1})). \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2

- Для любого $i = 2, \dots, n-1$, в силу соотношения 3, имеем
$$H\mathbf{l}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i(\alpha_1) \\ \sigma_i(\alpha_2) \\ \dots \\ \sigma_i(\alpha_{n-1}) \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_{i+1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_{i+1}(\alpha_1) \\ \dots \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-2}) \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix},$$
откуда $\mu_{i+1} = \sigma_i(\alpha_1)$ и
$$\sigma_{i+1}(\alpha_1) = \frac{\sigma_i(\alpha_2)}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_1)),$$
$$\sigma_{i+1}(\alpha_2) = \frac{\sigma_i(\alpha_3)}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_2)),$$
$$\dots,$$
$$\sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) = \frac{1}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_{n-1})).$$
- Применяя индукцию, получаем, что $\sigma_{i+1}(\alpha_1) = \sigma_2^i(\alpha_1)$, $\sigma_{i+1}(\alpha_2) = \sigma_2^i(\alpha_2)$, $\dots$, $\sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) = \sigma_2^i(\alpha_{n-1})$. Тогда $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{CF}$, так как числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля K.

Доказательство существования нужного поля

Доказательство существования нужного поля

- Для начала докажем существование конечного вполне вещественного циклического расширения Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$.

Доказательство существования нужного поля

- Для начала докажем существование конечного вполне вещественного циклического расширения Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$.
- В силу теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует такое простое p, что $p \equiv 1 \pmod{2n}$. Пусть ζ_p — корень степени p из единицы, и $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Заметим, что $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Рассмотрим поле $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.

Доказательство существования нужного поля

- Для начала докажем существование конечного вполне вещественного циклического расширения Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$.
- В силу теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует такое простое p, что $p \equiv 1 \pmod{2n}$. Пусть ζ_p — корень степени p из единицы, и $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Заметим, что $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Рассмотрим поле $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.
- Лемер показал, что K_0 — конечное вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени $\frac{p-1}{2}$. При этом $[E : K_0] = 2$, поскольку $x^2 - (\zeta_p + \zeta_p^{-1})x + 1$ — минимальный многочлен для ζ_p над K_0.

Доказательство существования нужного поля

- Для начала докажем существование конечного вполне вещественного циклического расширения Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$.
- В силу теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует такое простое p, что $p \equiv 1 \pmod{2n}$. Пусть ζ_p — корень степени p из единицы, и $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Заметим, что $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Рассмотрим поле $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.
- Лемер показал, что K_0 — конечное вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени $\frac{p-1}{2}$. При этом $[E : K_0] = 2$, поскольку $x^2 - (\zeta_p + \zeta_p^{-1})x + 1$ — минимальный многочлен для ζ_p над K_0.
- Поскольку группа $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ является циклической, то все ее подгруппы нормальны, более того, все факторгруппы $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ по подгруппам $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ циклические, а значит K_0 — циклическое расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ в силу основной теоремы теории Галуа.

Доказательство существования нужного поля

- Для начала докажем существование конечного вполне вещественного циклического расширения Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$.
- В силу теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует такое простое p, что $p \equiv 1 \pmod{2n}$. Пусть ζ_p — корень степени p из единицы, и $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Заметим, что $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Рассмотрим поле $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.
- Лемер показал, что K_0 — конечное вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени $\frac{p-1}{2}$. При этом $[E : K_0] = 2$, поскольку $x^2 - (\zeta_p + \zeta_p^{-1})x + 1$ — минимальный многочлен для ζ_p над K_0.
- Поскольку группа $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ является циклической, то все ее подгруппы нормальны, более того, все факторгруппы $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ по подгруппам $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ циклические, а значит K_0 — циклическое расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ в силу основной теоремы теории Галуа.
- Поскольку n делит $\frac{p-1}{2}$, то циклическая группа $\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$ содержит подгруппу F индекса n. Пусть $K = K_0^F$. Вновь применяя основную теорему теории Галуа получаем, что K — циклическое расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$, $[K : \mathbb{Q}] = [\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}) : F] = n$. При этом поле $K \subset K_0$ вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1

- Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения.

Доказательство теоремы 1

- Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения.
- По теореме о нормальном базисе существует набор чисел

$$\omega, \sigma(\omega), \ldots, \sigma^{n-1}(\omega),$$

являющийся базисом расширения K

Доказательство теоремы 1

- Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения.
- По теореме о нормальном базисе существует набор чисел
$$\omega, \sigma(\omega), \dots, \sigma^{n-1}(\omega),$$
являющийся базисом расширения K
- Тогда набор чисел $1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \dots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega}$ также образуют базис расширения K.

Доказательство теоремы 1

- Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения.
- По теореме о нормальном базисе существует набор чисел
$$\omega, \sigma(\omega), \ldots, \sigma^{n-1}(\omega),$$
являющийся базисом расширения K
- Тогда набор чисел $1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \ldots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega}$ также образуют базис расширения K.
- Стало быть, в силу предложения 1 вектор $(1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \ldots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Доказательство теоремы 1

- Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения.
- По теореме о нормальном базисе существует набор чисел

$$\omega, \sigma(\omega), \dots, \sigma^{n-1}(\omega),$$

являющийся базисом расширения K.
- Тогда набор чисел $1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \dots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega}$ также образуют базис расширения K.
- Стало быть, в силу предложения 1 вектор $(1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \dots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.
- Заметим, что для любого $j = 2, \dots, n-1$

$$\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\sigma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right)\sigma^2\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right)\cdots\sigma^{j-1}\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right) = \frac{\sigma^j(\omega)}{\omega},$$

при этом $\mathrm{N}(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}) = 1$.

Доказательство теоремы 1

- Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения.
- По теореме о нормальном базисе существует набор чисел
$$\omega, \sigma(\omega), \ldots, \sigma^{n-1}(\omega),$$
являющийся базисом расширения K
- Тогда набор чисел $1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \ldots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega}$ также образуют базис расширения K.
- Стало быть, в силу предложения 1 вектор $(1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \ldots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.
- Заметим, что для любого $j = 2, \ldots, n-1$
$$\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\sigma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right)\sigma^2\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right)\cdots\sigma^{j-1}\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right) = \frac{\sigma^j(\omega)}{\omega},$$
при этом $\mathrm{N}(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}) = 1$.
- Таким образом $\mathrm{CF}(A) \in \mathbf{CF}$. Для завершения доказательства достаточно применить лемму 2.

Спасибо!