

О распределении вещественных алгебраических чисел, целых и нецелых

Денис Владимирович
Коледа

Институт математики НАН Беларуси
Минск, Беларусь

Москва, 7–11 ноября 2022



О чём доклад?

В докладе:

- Рассмотрим частоту попадания алгебраических чисел, и в частности, целых алгебраических чисел, в произвольный интервал на вещественной оси.
- Для произвольного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ приведём асимптотические формулы для количества алгебраических чисел и целых алгебраических чисел $\alpha \in I$ фиксированной степени n и обычной высоты $H(\alpha) \leq Q$, где $Q > 0$ — достаточно большое число.
- Сравним распределения целых алгебраических чисел и алгебраических чисел на вещественной оси при $Q \rightarrow \infty$, рассмотрим некоторые особенности в распределении целых алгебраических чисел.

Основные определения

Определение.

Целочисленный многочлен — многочлен с целыми коэффициентами.

Алгебраическое число — число α , для которого существует целочисленный многочлен p , такой что $p(\alpha) = 0$.

Минимальный многочлен алгебраического числа α — целочисленный многочлен p_α наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами, такой что $p_\alpha(\alpha) = 0$.

Целое алгебраическое число — алгебраическое число, у которого минимальный многочлен унитарен (т.е. имеет единичный старший коэффициент).

Основные определения

Пусть

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Определение.

(Обычная) **высота многочлена** p :

$$H(p) := \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Степень алгебраического числа $\deg \alpha$ — степень минимального многочлена числа α .

Высота алгебраического числа $H(\alpha)$ — высота минимального многочлена числа α .

Общие замечания

В докладе:

- Степень алгебраических чисел фиксирована:

$$\deg = n.$$

- Высоты алгебраических чисел ограничены:

$$H \leq Q.$$

- Все асимптотические формулы рассматриваются при:

$$Q \rightarrow +\infty.$$

- Все неявные постоянные **не** зависят от Q .

Числовые множества и считающие функции

$\mathbb{A}_n(Q)$ обозначает множество всех **алгебраических чисел** α степени n над $\mathbb{Q}$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$;

$\mathcal{O}_n(Q)$ обозначает множество всех **целых алгебраических чисел** α степени n над $\mathbb{Q}$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$;

Для $S \subseteq \mathbb{R}$ и $Q > 0$ определим считающие функции

$$\Phi_n(Q, S) := \#(\mathbb{A}_n(Q) \cap S), \quad \Omega_n(Q, S) := \#(\mathcal{O}_n(Q) \cap S).$$

Рациональные числа

Последовательность Фарея (расширенная):

$$\mathbb{A}_1(Q) := \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \max(|a|, |b|) \leq Q, \gcd(a, b) = 1 \right\}.$$

Замечание: классическая последовательность Фарея — это

$$\mathbb{A}_1(Q) \cap [0, 1].$$

Из результата Вальфиша (A. Walfisz, 1963) несложно получить, что

$$\Phi_1(Q, \mathbb{R}) = \frac{12}{\pi^2} Q^2 + O(Q(\ln Q)^{2/3} (\ln \ln Q)^{4/3}).$$

Распределение рациональных чисел

- Из оценок отклонения последовательности Фарея от равномерного распределения, полученных Нидэррайтэром (H. Niederreiter, 1973) и Дрессом (F. Dress, 1999), следует

$$\sup_{I \subset \mathbb{R}} \left| \frac{\Phi_1(Q, I)}{\Phi_1(Q, \mathbb{R})} - \frac{1}{4} \int_I \frac{dt}{\max(1, t^2)} \right| \asymp Q^{-1},$$

где точная верхняя грань по всем промежуткам $I \subset \mathbb{R}$.

В частности, для $I \subset [-1, 1]$

$$\sup_{I \subset \mathbb{R}} \left| \frac{\Phi_1(Q, I)}{\Phi_1(Q, \mathbb{R})} - \frac{1}{4}|I| \right| \asymp Q^{-1}.$$

- Для всех неравных $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_1(Q)$ (т.е. для различных рациональных α и β высоты $\leq Q$)

$$|\alpha - \beta| \geq Q^{-2}.$$

Регулярные системы вещественных алгебраических чисел

Бэйкер и Шмидт (A. Baker & W.M. Schmidt, 1970) ввели понятие регулярной системы и установили, что алгебраические числа образуют регулярную систему. После нескольких усилений в сторону более плотных регулярных систем (V.I. Bernik & M.M. Dodson (1999), V.V. Beresnevich (1999)) наконец было доказано следующее.

Теорема 1 (Бересневич, 1999).

Существует постоянная c_n , зависящая только от n , такая что на любом промежутке $I \subseteq [-1, 1]$ для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ найдётся не менее

$$c_n |I| Q^{n+1}$$

алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ степени $\leq n$ и высоты $\leq Q$, таких что

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geq Q^{-n-1}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Регулярные системы вещественных алгебраических целых

Теорема 2 (Бюжé = Y. Vugeaud, 2002).

Существует постоянная $\tilde{c}_n$, зависящая только от n , такая что на любом промежутке $I \subseteq [-1, 1]$ для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ найдётся не менее

$$\tilde{c}_n |I| Q^n$$

целых алгебраических чисел $\beta_1, \dots, \beta_m$ степени $\leq n$ и высоты $\leq Q$, таких что

$$|\beta_i - \beta_j| \geq Q^{-n}, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Заметим, что когда высоты велики, алгебраические целые степени n напоминают алгебраические числа степени $n - 1$.

Обобщённые последовательности Фарея

Браун и Малер (H. Brown & K. Mahler, 1971) предложили обобщение последовательностей Фарея:

Определение.

Последовательность Фарея степени n и порядка Q — последовательность всех вещественных корней всех целочисленных многочленов степени n и (обычной) высоты $\leq Q$.

$\Phi_n(Q, \mathbb{R})$ есть количество элементов обобщённой последовательности Фарея степени n и порядка Q .

1-я основная теорема: вещ. алгебраические числа

Теорема 3 (Коледа, 2012–2017).

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — произвольный промежуток. Тогда

$$\left| \frac{\Phi_n(Q, I)}{(2Q)^{n+1}} - \frac{1}{2\zeta(n+1)} \int_I \rho_n(t) dt \right| \leq \begin{cases} c_n Q^{-1} \ln Q, & n = 1, 2, \\ c_n Q^{-1}, & n \geq 3, \end{cases}$$

где

- c_n — положительная постоянная, зависящая только от степени n ;
- $\zeta(\cdot)$ — дзета-функция Римана;
- ρ_n — положительная непрерывная функция (явное выражение дальше).

Плотность распределения вещ. алгебраических чисел

Функция ρ_n выражается формулой

$$\rho_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{G_n(t)} \left| \sum_{k=1}^n k \xi_k t^{k-1} \right| d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (1)$$

где область интегрирования

$$G_n(t) = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n \xi_k t^k \right| \leq 1 \right\}.$$

Некоторые свойства функции ρ_n :

- $\rho_n(t)$ непрерывна и положительна для всех вещественных t .
- $\rho_n(t)$ чётна: $\rho_n(-t) = \rho_n(t)$.
- Для всех $t \neq 0$ верно тождество $\rho_n(t) = \frac{1}{t^2} \rho_n\left(\frac{1}{t}\right)$.

Плотность распределения вещ. алгебраических чисел

При $|t| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,29 \dots$ функция ρ_n равна многочлену:

$$\rho_n(t) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 t^{2k} \right).$$

При $|t| \geq 2 + \sqrt{2} = 3,41 \dots$ функция ρ_n рациональна:

$$\rho_n(t) = \frac{1}{4t^2} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{t^{2k}} \right).$$

2-я основная теорема: вещ. алгебраические целые

Теорема 4 (Коледа, 2015–2020).

Зафиксируем целое $n \geq 2$. Тогда для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ выполняется

$$\left| \frac{\Omega_n(Q, I)}{(2Q)^n} - \int_I \psi_n(Q^{-1}, t) dt \right| \leq \begin{cases} \kappa_n Q^{-1}, & n \geq 3, \\ \kappa_n Q^{-1} \ln Q, & n = 2, \end{cases} \quad (2)$$

где

- функция $\psi_n(\xi, t)$ может быть записана в виде

$$\psi_n(\xi, t) = \begin{cases} \rho_{n-1}(t) + \frac{1}{4} \xi^2 t^2, & |t| \leq \xi^{-1/2}, \\ \frac{1}{2} \xi, & \xi^{-1/2} < |t| < \xi^{-1} + 1, \\ 0, & |t| \geq \xi^{-1} + 1, \end{cases} \quad (3)$$

здесь $\rho_n(t)$ та же, что и в (1);

- положительная постоянная κ_n зависит только от степени n .



Применимость основных теорем

- В обоих случаях промежуток I может зависеть от Q . Обе теоремы остаются верны независимо от длины и расположения промежутка I .
- Обе теоремы дают нетривиальные оценки, когда промежутки имеют длину $\gg Q^{-1}$ (или $\gg Q^{-1} \ln Q$ при $n = 2$).
- Для коротких промежутков I с $|I| \ll Q^{-1}$ обе теоремы дают только верхние оценки на $\Phi_n(Q, I)$ и $\Omega_n(Q, I)$ вида $O(Q^n)$ и $O(Q^{n-1})$ соответственно. (При $n = 2$ появляется дополнительный множитель $\ln Q$.)

“Плато равномерности”

Для любого промежутка $I \subset (-Q - 1, -Q^{1/2}) \cup (Q^{1/2}, Q + 1)$

$$\left| \frac{\Omega_n(Q, I)}{(2Q)^{n-1}} - |I| \right| \leq \begin{cases} \kappa_n, & n \geq 3, \\ \kappa_2 \ln Q, & n = 2. \end{cases} \quad (4)$$

- Асимптотика (4) становится нетривиальной, если промежуток I достаточно велик, т.е. когда $\lim_{Q \rightarrow \infty} |I| = \infty$.
- При $Q \rightarrow \infty$ “плато равномерности” отдаляются от начала координат и растягиваются, так что около фиксированной точки распределение алгебраических целых остаётся равномерным (с некоторой погрешностью) только для конечного диапазона значений Q .

Происхождение “плато равномерности”

Эти “плато равномерности” образованы в основном числами Перрона.

Вещественное целое алгебраическое число α называется **числом Перрона**, если все его сопряжённые (по Галуа) меньше чем α по абсолютной величине.

Общее количество вещественных целых алгебраических чисел

Теорема 5 (Коледа, 2016–2017).

Пусть $n \geq 2$. Тогда

$$\frac{\Omega_n(Q, \mathbb{R})}{(2Q)^n} = \int_{\mathbb{R}} \rho_{n-1}(t) dt + 1 - \frac{4}{3\sqrt{Q}} + r_n(Q, \mathbb{R}), \quad (5)$$

where

$$r_n(Q, \mathbb{R}) = \begin{cases} O(Q^{-1}), & n \geq 3, \\ -\frac{\ln Q}{Q} + \frac{2(1-\gamma)}{Q} + O\left(\frac{1}{Q\sqrt{Q}}\right), & n = 2. \end{cases}$$

Здесь $\gamma = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера;
неявные O -постоянные зависят только от n .

Поведение функции $\psi_n(\xi, t)$

Для всех вещественных t

$$|\psi_n(\xi, t) - \rho_{n-1}(t)| \leq \frac{1}{2} \xi,$$

т.е. функция $\omega_n(\xi, t)$ равномерно сходится к $\rho_{n-1}(t)$ при стремлении ξ к нулю.

Следовательно, если мы возьмём любой конечный промежуток I , то получим

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\int_I \psi_n(\xi, t) dt}{\int_I \rho_{n-1}(t) dt} = 1.$$

Поэтому теорема 4 показывает, что при возрастании высот вещественные алгебраические целые степени n статистически ведут себя как вещественные алгебраические числа степени $n - 1$.

Сюрприз

Поэтому, ввиду сказанного выше, теорема 4 могла бы утверждать, что

в пределе $Q \rightarrow \infty$ вещественные алгебраические целые степени n и вещественные алгебраические числа степени $n - 1$ имеют одинаковую плотность распределения.

Но если, например, взять $I = \mathbb{R}$, внезапно получим

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} \psi_n(\xi, t) dt}{\int_{\mathbb{R}} \rho_{n-1}(t) dt} = 1 + \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_{n-1}(t) dt \right)^{-1} > 1.$$

Поэтому спрятать разность $\psi_n(\xi, t) - \rho_{n-1}(t)$ при $\xi = Q^{-1}$ в остаток асимптотики не удастся.

Следствие сюрприза

В итоге из теорем 4 и 5 получаем

Следствие 6 (Коледа).

Для любого фиксированного конечного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\Omega_n(Q, I)}{\Phi_{n-1}(Q, I)} = 2\zeta(n). \quad (6)$$

Однако в общем случае, когда I бесконечен или меняется с ростом Q , равенство (6) может нарушаться. В частности,

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\Omega_n(Q, \mathbb{R})}{\Phi_{n-1}(Q, \mathbb{R})} = 2\zeta(n) \left(1 + \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \rho_{n-1}(t) dt} \right).$$

Заключение

- Распределение вещественных алгебраических чисел фиксированной степени можно описать в терминах плотности распределения.
- При больших высотах, если смотреть на фиксированные ограниченные интервалы вещественной оси, алгебраические целые степени n статистически похожи на алгебраические числа степени $n - 1$. (Часть имеющая два симметричных максимума, похожих на горбы верблюда.)
- Есть две симметричные “равнины” (“плато”), где распределение вещественных алгебраических целых напоминает рациональные целые. Эти равнины образованы числами Перрона и с ростом высоты алгебраических целых растягиваются и понижаются. (Равнинная часть названа так из-за постоянства плотности.)
- При фиксированной степени n и растущих высотах обе части — и горбатая, и равнинная — содержат сравнимое по порядку величины количество элементов. Поэтому ни одной из частей нельзя пренебречь при подсчёте общего количества вещественных алгебраических целых степени n .

Литература

- 1 Koleda, D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. J. Théor. Nombres Bordeaux 29 (2017), no. 1, 179–200.
- 2 Koleda, D. V. Distribution of real algebraic integers. J. Number Theory 210 (2020), 333–372.

Спасибо за внимание!