

Аналог теоремы переноса Малера для мультипликативных диофантовых приближений

О. Н. Герман

Мехмат МГУ,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Вторая конференция Математических центров России
8 ноября 2022

$\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z})$ — линейные формы на $\mathbb{R}^d$, $n < d$

Вопрос

Насколько «мал» может быть набор $(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z}))$ на ненулевых $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$?

$\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z})$ — линейные формы на $\mathbb{R}^d$, $n < d$

Вопрос

Насколько «мал» может быть набор $(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z}))$ на ненулевых $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$?

Как измерять?

- sup-норма ($\sim$ среднее арифметическое)
- произведение ($\sim$ среднее геометрическое)

$\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z})$ — линейные формы на $\mathbb{R}^d$, $n < d$

Вопрос

Насколько «мал» может быть набор $(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z}))$ на ненулевых $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$?

Как измерять?

- суп-норма ($\sim$ среднее арифметическое)
- произведение ($\sim$ среднее геометрическое)

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$$d = m + n$$

Совместные приближения

$m = 1$, sup-норма

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\theta_i x - y_i| \leq f(x)$$

$$d = m + n$$

Совместные приближения

$m = 1$, sup-норма

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\theta_i x - y_i| \leq f(x)$$

Приближение нуля значениями линейной формы

$n = 1$, sup-норма

$$|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_m x_m - y| \leq f\left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)$$

Некоторые классические примеры

$$d = m + n$$

Совместные приближения

$m = 1$, sup-норма

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\theta_i x - y_i| \leq f(x)$$

Приближение нуля значениями линейной формы

$n = 1$, sup-норма

$$|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_m x_m - y| \leq f\left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)$$

Гипотеза Литтлвуда

$m = 1$, $n = 2$, произведение

$$|(\theta_1 x - y_1)(\theta_2 x - y_2)| \leq f(x) = o(x^{-1})$$

Диофантовы экспоненты и принцип переноса

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = (\Theta \quad -I_n) \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Диофантовы экспоненты и принцип переноса

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = (\Theta \quad -I_n) \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Pi(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} |z_i|^{1/k} \quad \Pi'(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} \max(1, |z_i|)^{1/k} \quad (\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k))$$

Диофантовы экспоненты и принцип переноса

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = (\Theta \quad -I_n) \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Pi(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} |z_i|^{1/k} \quad \Pi'(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} \max(1, |z_i|)^{1/k} \quad (\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k))$$

Диофантовы экспоненты матрицы Θ

$$\omega(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ решений в } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

$$\omega_{\times}(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ реш. в } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

Диофантовы экспоненты и принцип переноса

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = (\Theta \quad -I_n) \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Pi(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} |z_i|^{1/k} \quad \Pi'(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} \max(1, |z_i|)^{1/k} \quad (\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k))$$

Диофантовы экспоненты матрицы Θ

$$\omega(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ решений в } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

$$\omega_{\times}(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ реш. в } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

Неравенства переноса

Дайсон (1947), О.Г. (2011)

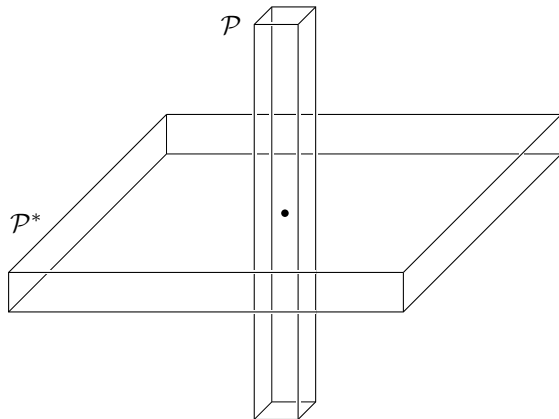
$$\omega(\Theta^{\top}) \geq \frac{n\omega(\Theta) + n - 1}{(m - 1)\omega(\Theta) + m}$$

$$\omega_{\times}(\Theta^{\top}) \geq \frac{n\omega_{\times}(\Theta) + n - 1}{(m - 1)\omega_{\times}(\Theta) + m}$$

Теорема Малера

Псевдоприсоединённый параллелепипед

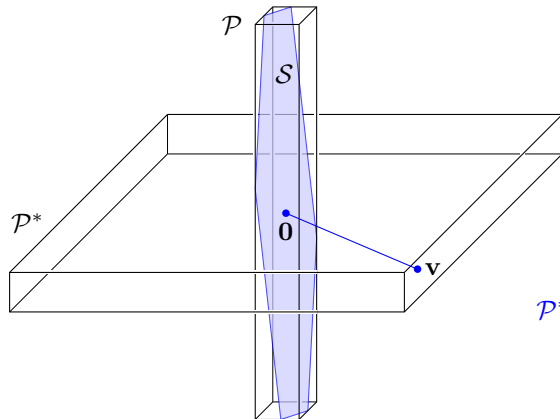
$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \lambda_i, \ i = 0, \dots, d \right\}$$
$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \frac{\lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_d}{\lambda_i}, \ i = 0, \dots, d \right\}$$



Теорема Малера

Псевдоприсоединённый параллелепипед

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \lambda_i, i = 0, \dots, d \right\}$$
$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \frac{\lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_d}{\lambda_i}, i = 0, \dots, d \right\}$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$$

Вывод неравенства Дайсона из теоремы Малера

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

Вывод неравенства Дайсона из теоремы Малера

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$\mathcal{P}(t, \gamma) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{ll} |z_j| \leq t, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq t^{-\gamma}, & i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$
$$\mathcal{Q}(s, \delta) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{ll} |z_j| \leq s^{-\delta}, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq s, & i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

Вывод неравенства Дайсона из теоремы Малера

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$\mathcal{P}(t, \gamma) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{ll} |z_j| \leq t, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq t^{-\gamma}, & i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathcal{Q}(s, \delta) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{ll} |z_j| \leq s^{-\delta}, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq s, & i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

$$\omega(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \geq \frac{m}{n} \left| \forall t_0 \in \mathbb{R} \exists t > t_0 : \text{справедливо } \mathcal{P}(t, \gamma) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \right. \right\}$$

$$\omega(\Theta^\top) = \sup \left\{ \delta \geq \frac{n}{m} \left| \forall s_0 \in \mathbb{R} \exists s > s_0 : \text{справедливо } \mathcal{Q}(s, \delta) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \right. \right\}$$

Вывод неравенства Дайсона из теоремы Малера

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$\mathcal{P}(t, \gamma) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{ll} |z_j| \leq t, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq t^{-\gamma}, & i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathcal{Q}(s, \delta) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{ll} |z_j| \leq s^{-\delta}, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq s, & i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

$$\omega(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \geq \frac{m}{n} \left| \forall t_0 \in \mathbb{R} \exists t > t_0 : \text{справедливо } \mathcal{P}(t, \gamma) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \right. \right\}$$

$$\omega(\Theta^\top) = \sup \left\{ \delta \geq \frac{n}{m} \left| \forall s_0 \in \mathbb{R} \exists s > s_0 : \text{справедливо } \mathcal{Q}(s, \delta) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \right. \right\}$$

$$t = s^{((n-1)\delta+n)/(d-1)}, \quad \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n} \implies \mathcal{Q}(s, \delta) = \mathcal{P}(t, \gamma)^*$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{ll} |z_j| \leq \lambda_j, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, & i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} |z_j| \leq \lambda_j, \quad j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}(t, \gamma) = \left\{ \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid \Pi(\boldsymbol{\lambda}) = t, \Pi(\boldsymbol{\mu}) = t^{-\gamma}, \min_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \geq 1 \right\}$$

$$\mathcal{G}(s, \delta) = \left\{ \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid \Pi(\boldsymbol{\lambda}) = s^{-\delta}, \Pi(\boldsymbol{\mu}) = s, \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \geq 1 \right\}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} |z_j| \leq \lambda_j, \quad j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}(t, \gamma) = \left\{ \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid \Pi(\boldsymbol{\lambda}) = t, \Pi(\boldsymbol{\mu}) = t^{-\gamma}, \min_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \geq 1 \right\}$$

$$\mathcal{G}(s, \delta) = \left\{ \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid \Pi(\boldsymbol{\lambda}) = s^{-\delta}, \Pi(\boldsymbol{\mu}) = s, \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \geq 1 \right\}$$

$$\omega_{\times}(\Theta) = \sup \left\{ \gamma \geq \frac{m}{n} \mid \forall t_0 \in \mathbb{R} \exists t > t_0 : \exists \mathcal{P} \in \mathcal{F}(t, \gamma) : \mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \right\}$$

$$\omega_{\times}(\Theta^\top) = \sup \left\{ \delta \geq \frac{n}{m} \mid \forall s_0 \in \mathbb{R} \exists s > s_0 : \exists \mathcal{P} \in \mathcal{G}(s, \delta) : \mathcal{P} \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \right\}$$

Аналог теоремы Малера для мультипликативных задач

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{ll} |z_j| \leq \lambda_j, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, & i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

Аналог теоремы Малера для мультипликативных задач

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{ll} |z_j| \leq \lambda_j, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, & i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\lambda_j^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \lambda_j \quad \mu_i^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \mu_i$$

Аналог теоремы Малера для мультипликативных задач

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} |z_j| \leq \lambda_j, \quad j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\lambda_j^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \lambda_j \quad \mu_i^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \mu_i$$

$$\lambda_{j_1} \leq \dots \leq \lambda_{j_m} \quad k = \max \{ \ell \mid \lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_\ell} < 1 \}$$

Аналог теоремы Малера для мультипликативных задач

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} |z_j| \leq \lambda_j, \quad j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\lambda_j^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \lambda_j \quad \mu_i^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \mu_i$$

$$\lambda_{j_1} \leq \dots \leq \lambda_{j_m} \quad k = \max \{ \ell \mid \lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_\ell} < 1 \}$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{j_i} &= 1, & i &= 1, \dots, k \\ \hat{\lambda}_{j_i} &= \lambda_{j_i} (\lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_k})^{1/(m-k)}, & i &= k+1, \dots, m \end{aligned}$$

Аналог теоремы Малера для мультипликативных задач

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid \begin{array}{l} |z_j| \leq \lambda_j, \quad j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$\lambda_j^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \lambda_j \quad \mu_i^* = (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n) / \mu_i$$

$$\lambda_{j_1} \leq \dots \leq \lambda_{j_m} \quad k = \max \{ \ell \mid \lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_\ell} < 1 \}$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{j_i} &= 1, & i &= 1, \dots, k \\ \hat{\lambda}_{j_i} &= \lambda_{j_i} (\lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_k})^{1/(m-k)}, & i &= k+1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$$

$$\mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*) \cap \Lambda^* \neq \{0\} \implies \begin{cases} c\mathcal{P}(\lambda, \mu) \cap \Lambda \neq \{0\} \\ c\mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \cap \Lambda \neq \{0\} \end{cases}$$

Спасибо!