Формы Якоби, эллиптический род и дифференциальные уравнения

Дмитрий Адлер

(ММИ им. Л. Эйлера)

Вторая конференция Математических центров России

7-11 ноября 2022, Москва

Данный доклад подготовлен по совместной работе

Dmitrii Adler, Valery Gritsenko, *Elliptic genus and modular differential equations*, Journal of Geometry and Physics, Volume **181**, 2022, https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104662.

1 Модулярный дифференциальный оператор

Определение. Пусть k – целое число. Тогда функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ голоморфная на $\mathcal{H}$ и в точке ∞ называется *модулярной формой веса k*, если

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau) \text{ для } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ и } \tau \in \mathcal{H}.$$

Множество всех модулярных форм веса k обозначается $M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

Модулярные формы имеют разложение в ряд Фурье вида

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Теорема. Кольцо модулярных форм $M_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \bigoplus_k M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ является свободной алгеброй над $\mathbb{C}$ с двумя образующими:

$$M_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6].$$

Одними из самых важных примеров в теории модулярных форм являются ряды Эйзенштейна:

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

где B_k – k-е число Бернулли, $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.

При $k = 2$ можно определить ряд Эйзенштейна

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n,$$

преобразующийся следующим образом:

$$E_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i} c(c\tau + d).$$

Пусть $D = q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i\tau}\frac{d}{d\tau}$. Тогда для модулярной формы $f = \sum a(n)q^n$ веса k:

$$D(f) = \sum na(n)q^n.$$

Вообще говоря, $D(f)$ не является модулярной формой, но ей является:

$$D_k(f) = D(f) - \frac{k}{12}E_2 \cdot f \in M_{k+2}.$$

Как можно проверить, для η-функции Дедекинда

$$\frac{D(\eta)}{\eta} = \frac{1}{24}E_2 \quad \Longrightarrow \quad D_{\frac{k}{2}}(\eta^k) = 0.$$

Имеют место также известные уравнения Рамануджана:

$$D_2(E_2) = -\frac{1}{12}(E_2^2 + E_4), \quad D_4(E_4) = -\frac{1}{3}E_6, \quad D_6(E_6) = -\frac{1}{2}E_4^2.$$

То есть кольцо $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ инвариантно относительно D.

2 Формы Якоби

Определение. Пусть $\tau \in \mathcal{H}$ и $z \in \mathbb{C}$. Тогда *слабая форма Якоби веса k и индекса m* – это голоморфная функция $\varphi : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i m \frac{cz^2}{c\tau+d}} \varphi(\tau, z)$ для $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$;

2) $\varphi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-4\pi i m \lambda z - 2\pi i m \lambda^2 \tau} \varphi(\tau, z)$ для $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$;

3) функция $\varphi(\tau, z)$ имеет разложение в ряд Фурье:

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geqslant 0} a(n, l) q^n \zeta^l = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geqslant 0} a(n, l) e^{2\pi i n \tau} e^{2\pi i l z},$$

множество таких форм обозначается

$$J^w_{*,*} = \bigoplus_{k,m} J^w_{k,m}.$$

3 Структура биградуированного кольца $J^w_{*,*}$

Как было показано в M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics **55**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1985, биградуированное кольцо слабых форм Якоби имеет структуру свободной алгебры

$$J^w_{*,*} = \oplus_{k,m} J^w_{k,m} = \mathbb{C}\langle \varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1} \rangle$$

$$\varphi_{-2,1}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)^2}{\eta^6(\tau)} = (\zeta - 2 + \zeta^{-1}) + q \cdot (\dots) \in J^w_{-2,1}$$

$$\varphi_{0,1}(\tau, z) = -\frac{3}{\pi^2}\wp(\tau, z)\varphi_{-2,1}(\tau, z) = (\zeta + 10 + \zeta^{-1}) + q \cdot (\dots) \in J^w_{0,1},$$

где $\vartheta(\tau, z)$ – классическая нечётная тета-функция Якоби, а $\wp(\tau, z)$ – $\wp$-функция Вейерштрасса.

Отметим, что $2\varphi_{0,1}$ есть эллиптический род $K3$ поверхности, а такжн является производящей функцией кратностей положительных корней одной из основных лоренцевых алгебр Каца-Муди, построенных в V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras*. Part II, Int. J. Math. 9 (1998) 201–275.

4 Эллиптический род

Пусть M – (почти) комплексное компактное многообразие (комплексной) размерности d и T_M – его касательное расслоение. Пусть $\tau \in \mathcal{H}$, $q = e^{2\pi i\tau}$ и $z \in \mathbb{C}$, $\zeta = e^{2\pi iz}$. Оределим формальный ряд

$$\mathbb{E}_{q,\zeta} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits_{-\zeta^{-1}q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \bigwedge\nolimits_{-\zeta q^n} T_M \otimes \bigotimes_{n=0}^{\infty} S_{q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=0}^{\infty} S_{q^n} T_M,$$

где

$$\bigwedge\nolimits_x E = \sum_{k\geqslant 0} (\wedge^k E) x^k, \quad S_x E = \sum_{k\geqslant 0} (S^k E) x^k.$$

и $\wedge^k$ – k-я внешняя степень, S^k – k-я симметрическая степень.

Пусть

- td – это класс Тодда,
- $\mathrm{ch}(\mathbb{E}_{q,\zeta})$ – характер Черна, применённый к каждому коэффициенту формального ряда,
- $\int_M$ – вычисление дифференциальной формы старшей степени на фундаментальном цикле многообразия.

Тогда эллиптический род многообразия M – функция от $\tau \in \mathcal{H}$ и $z \in \mathbb{C}$:

$$\chi(M;\tau,z) = \zeta^{\frac{d}{2}} \int_M \mathrm{ch}(\mathbb{E}_{q,\zeta})\mathrm{td}(T_M) = \sum_{n\geq 0,\, l\in\mathbb{Z}} a(n,l)\, q^n \zeta^l,$$

причём q^0-член эллиптического рода M равен χ_y-роду Хирцебруха с точностью до некоторой нормализации:

$$\chi(M;\tau,z) = \sum_{p=0}^{d} (-1)^p \chi_p(M_d) \zeta^{d/2-p} + q(\ldots)$$

где $\chi_p(M) = \sum_{q=0}^{d} (-1)^q h^{p,q}(M)$.

5 Эллиптический род и формы Якоби

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если M – компактное комплексное многообразие размерности d с $c_1(M) = 0$ (над $\mathbb{R}$), то его эллиптический род $\chi(M; \tau, z)$ является слабой формой Якоби веса 0 и индекса $\frac{d}{2}$ с целыми коэффициентами Фурье.

Подробнее см. :

T. Kawai, Y. Yamada, S. K. Yang, *Elliptic Genera and $N = 2$ Superconformal Field Theory.* Nucl. Phys. **B414** (1994), 191–212.

V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms.* St. Petersburg Math. J. **11** (1999), 781–804.

B. Totaro, *Chern numbers for singular varieties and elliptic homology*, Ann. Math. (2) 151 (2000) 757–791.

6 Модулярный дифференциальный оператор H_k

Аналогом оператора D в случае форм Якоби является **оператор теплопроводности**

$$H = \frac{3}{m}\frac{1}{(2\pi i)^2}\left(8\pi i m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = 12q\frac{d}{dq} - \frac{3}{m}\left(\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)^2.$$

На форму $\varphi_{k,m} = \sum a(n,l)q^n\zeta^l$ веса k и индекса m он действует

$$H(a(n,l)q^n\zeta^l) = \frac{3}{m}(4nm - l^2)q^n\zeta^l.$$

Как и в случае модулярных форм, $H(\varphi_{k,m})$ не является вообще говоря формой Якоби, но ей является её корректировка при помощи E_2:

$$H_k(\varphi_{k,m}) = H(\varphi_{k,m}) - \frac{(2k-1)}{2}E_2\cdot\varphi_{k,m}.$$

Данный оператор увеличивает вес формы на 2 и не меняет индекс.

7 Эллиптический род многообразий Калаби-Яу размерности 2, 3 и 5

В случае индексов $m = 1, \frac{3}{2}$ и $\frac{5}{2}$ пространства $J^w_{0,m}$ одномерны. Тогда эллиптический род многообразий Калаби-Яу размерностей 2, 3 и 5 зависит только от их эйлеровой характеристики (значении q^0-члена при $z = 0$).

Многообразие Калаби-Яу размерности 2 – это $K3$-поверхность с

$$e(K3) = 24.$$

Тогда

$$\chi(K3; \tau, z) = 2\varphi_{0,1}(\tau, z) = 2\zeta + 20 + 2\zeta^{-1} + q(\dots).$$

Для многообразий Калаби-Яу размерности 3 и 5:

$$\chi(CY_3; \tau, z) = \frac{e(CY_3)}{2}\,\varphi_{0,\frac{3}{2}} = \frac{e(CY_3)}{2}\left(\zeta^{-\frac{1}{2}} + \zeta^{\frac{1}{2}} + q(\dots)\right),$$

$$\chi(CY_5; \tau, z) = \frac{e(CY_5)}{24}\,\varphi_{0,\frac{3}{2}} \cdot \varphi_{0,1} = \frac{e(CY_5)}{24}\left(\zeta^{\pm\frac{3}{2}} + 11\zeta^{\pm\frac{1}{2}} + q(\dots)\right)$$

8 Дифференциальные уравнения

Теорема.

Для эллиптических родов многообразий Калаби-Яу размерности 2, 3 и 5 имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$H_0(\phi_{0,\frac{3}{2}}) = 0 \quad \text{или} \quad H(\phi_{0,\frac{3}{2}}) + \frac{1}{2}E_2\phi_{0,\frac{3}{2}} = 0$$

$$H_4H_2H_0(\varphi_{0,1}) - \frac{101}{4}E_4H_0(\varphi_{0,1}) + 10E_6\varphi_{0,1} = 0,$$

$$H_4H_2H_0(\varphi_{0,\frac{5}{2}}) - \frac{611}{25}E_4H_0(\varphi_{0,\frac{5}{2}}) + \frac{88}{25}E_6\varphi_{0,\frac{5}{2}} = 0.$$

Таким образом, эллиптический род трехмерных многообразий Калаби-Яу удовлетворяет простейшему уравнению порядка 1 относительно оператора теплопроводности. Эллиптический род $K3$ поверхности и любого многообразия Калаби-Яу размерности 5 удовлетворяют модулярному дифференциальному уравнению порядка 3.

9 Уравнения Канеко-Загье

Дифференциальное уравнение Канеко-Загье

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6} E_2(\tau) f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12} E_2'(\tau) f(\tau) = 0$$

возникло в работе

M. Kaneko, D. Zagier, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials.* AMS/IP Stud. Adv. Math. **7** (1998), 97–126.

в контексте подъёмов суперсингулярных j-инвариантов. В терминах оператора D_k оно может быть записано как

$$D_{k+2} D_k(f) - \frac{k(k+2)}{144} E_4 \cdot f = 0.$$

Как можно заметить, $E_4(\tau)$ удовлетворяет данному уравнению. Это уравнение и его обобщения имеют приложения а теории чисел и теории вертексных алгебр.

10 Аналог уравнения Канеко-Загье для форм Якоби

Если мы заменим оператор D_k на H_k, а ряд Эйзенштейна E_4 на $E_{4,1}$, то мы можем получить уравнение на $E_{4,1}$. А именно,

$$H_6 H_4(E_{4,1}(\tau, z)) - \frac{77}{4} E_4(\tau) E_{4,1}(\tau, z) = 0.$$

В нашей работе мы даём общий алгоритм нахождения таких уравнений.

$$H_3 H_1(\vartheta^2(\tau, z)) - \frac{5}{4} E_4(\tau) \vartheta^2(\tau, z) = 0,$$

$$H_3 H_1(\vartheta(\tau, z)\vartheta(\tau, 2z)) - \frac{11}{25} E_4(\tau)(\vartheta(\tau, z)\vartheta(\tau, 2z)) = 0,$$

$$H_{\frac{5}{2}} H_{\frac{3}{2}}(\vartheta^3(\tau, z)) - 3E_4(\tau)\vartheta^3(\tau, z) = 0,$$

$$H_{\frac{7}{2}} H_{\frac{3}{2}}(\vartheta(\tau, 2z)\vartheta^2(\tau, z)) - \frac{5}{4} E_4(\tau)(\vartheta(\tau, 2z)\vartheta^2(\tau, z)) = 0.$$

11 МДУ для форм Якоби индекса 2

Отметим, что наш алгоритм нахождения дифференциальных уравнений работает для форм произвольного индекса. В частности, имеется следующий результат.

Теорема. Общая форма Якоби $\Phi_{0,2} \in J^w_{0,2} = \mathbb{C}\langle E_4\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}\rangle$ удовлетворяет дифференциальному уравнению минимального порядка 5, за исключением форм

$$\varphi_{0,2}(\tau, z) = \zeta^{\pm 1} + 4 + q(\dots),$$
$$\psi_{0,2}(\tau, z) = \zeta^{\pm 2} + 22 + q(\dots),$$
$$\rho_{0,2}(\tau, z) = 2\zeta^{\pm 2} - 11\zeta^{\pm 1} + q(\dots),$$

удовлетворяющим уравнениям порядка 3, формы

$$\xi_{0,2} = 115\zeta^{\pm 2} + 8624\zeta^{\pm 1} + 37026 + q(\dots),$$

удовлетворяющей уравнению порядка 4, и формы

$$\sigma_{0,2} = 5\zeta^{\pm 2} - 308\zeta^{\pm 1} - 1122 + q(\dots),$$

удовлетворяющей уравнению порядка 6.

Спасибо за внимание!