Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов[1]

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)

Москва, 11 ноября 2022

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [1] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

Параллелепипедальные сетки

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \qquad (1)$$

имеют простой вид, требуется условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, s))$ и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \ldots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \ldots, a_s)$.

Основная мера качества

$S_p(z_1, \dots, z_s)$ выражается через сумму[2]

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2}{}' \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \qquad (2)$$

где $z_1, \dots, z_s$ – произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m, $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod p, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod p. \end{cases} \qquad (3)$$

.

[2] Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

Определение

Согласно определению, *если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполняется неравенство*

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \leqslant B \frac{\ln^\beta p}{p}, \tag{4}$$

то целые $a_1, \ldots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю p.

Количественная мера качества

Количественной мерой качества набора коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_s$ параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(p, \vec{a}) = \frac{3^{s+1}}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{s} \left(1 - 2 \cdot \left\{\frac{a_j \cdot k}{p}\right\}\right)^2, \qquad (5)$$

которая равна приближенному значению интеграла от функции $h(\vec{x}) = \frac{3^{s+1}}{p} \prod\limits_{j=0}^{s} (1 - 2x_j)^2$ по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1 = \int_0^1 \ldots \int_0^1 h(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{3^{s+1}}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{s} \left(1 - 2 \cdot \left\{\frac{a_j \cdot k}{p}\right\}\right)^2 - R_p[h],$$

где $R_p[h]$ — погрешность приближенного интегрирования.

Выбор функции $h(\vec{x})$ и величины $H(p, \vec{a})$ связан с тем, что функция $h(\vec{x})$ является граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ (подробности см. [3]).

Оценки В. А. Быковского

В работе [2] В. А. Быковский получил принципиально новые оценки для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе E_s^α. Фактически В. А. Быковский получил оценки сверху и снизу для гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения через сумму по конечному множеству минимальных решений, которое мы в своих работах называем множеством Быковского. В работе [3] оценки Быковского были перенесены на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Цель данной работы — получить аналог оценок Быковского для основной меры качества наборов оптимальных коэффициентов и уточнить оценку Быковского для количественной меры качества.

Минимальное множество Быковского

Рассмотрим сравнение

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \tag{6}$$

относительно целочисленных переменных $m_1, \ldots, m_s$. Его ненулевое решение называется минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m_1', \ldots, m_s')$, для которого

$$|m_1'| \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s'| \leqslant |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Множество всех минимальных решений сравнения (6) будем обозначать через $B_N(a_1, \ldots, a_s)$.

Нетрудно показать, что при $(|n_1|+1)\dots(|n_s|+1) > N$ сравнение (6) имеет хотя бы одно ненулевое решение $m_1, \dots, m_s$ такое, что

$$|m_1| \leqslant |n_1|, \dots, |m_s| \leqslant |n_s|.$$

Поэтому для любого минимального решения выполняется неравенство $\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \leqslant N$, где для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$. Отсюда следует конечность $B_N(a_1, \dots, a_s)$ — множества всех минимальных решений. Нетрудно видеть, что для решетки $\Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$ — решений сравнения (6) множество $B_N(a_1, \dots, a_s)$ минимальных решений сравнения совпадает с множеством локальных минимумов.

Пусть $\vec{m}_j = (m_{1\,j}, \ldots, m_{s\,j})$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, $r = r_N(a_1, \ldots, a_s)$ есть все минимальные решения для данного набора коэффициентов $a_1, \ldots, a_s$ сравнения (6). Величина

$$q_N(a_1, \ldots, a_s) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \overline{m_{1\,j}} \ldots \overline{m_{s\,j}}$$

является гиперболическим параметром решетки $\Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$, а норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с соответствующей параллелепипедальной сеткой выражается через гиперболическую дзету-функцию целочисленной решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$:

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{m_s})^{\alpha}}, \qquad (7)$$

Периодическая функция $f(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$ имеет разложение в обычный ряд Фурье вида

$$f(x) = 1 + {\sum_{m=-\infty}^{\infty}}' \frac{6}{\pi^2 m^2} e^{2\pi i m x}.$$

В работах [4, 5] доказана лемма о конечном ряде Фурье для функции $f(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$.

Лемма

Для конечного ряда Фурье

$$3\left(1-2\left\{\frac{x}{n}\right\}\right)^2=\sum_{m=-n_1}^{n_2}C(m)e^{2\pi i\frac{mx}{n}}\quad (x=0,1,\dots,n-1) \tag{8}$$

справедливы равенства $n_1=\left[\frac{n-1}{2}\right]$, $n_2=\left[\frac{n}{2}\right]$,

$$C(0)=1+\frac{2}{n^2}, \tag{9}$$

$$C(m)=\frac{6}{n^2\sin^2\pi\frac{m}{n}},\quad (m\neq 0,\ -n_1\leqslant m\leqslant n_2). \tag{10}$$

Из этой леммы следует теорема о конечном ряде Фурье для функции $H(p, \vec{a})$.

Theorem

Справедливо равенство

$$H(N, \vec{a}) = \left(1 + \frac{2}{N^2}\right)^s + \sum_{m_1, \ldots, m_s = -N_1}^{N_2}{}' \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\psi(m_1) \ldots \psi(m_s)},$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} \dfrac{N^2}{N^2 + 2}, & \text{при } m = 0; \\ \dfrac{N^2 \sin^2 \pi \frac{m}{N}}{6}, & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \qquad N_1 = \left[\frac{N-1}{2}\right], \quad N_2 = \left[\frac{N}{2}\right].$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a},\vec{x})$ прямоугольный $s-$мерный полуоткрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a},\vec{x}) = \left\{ \vec{y} \;\middle|\; \begin{cases} a_\nu \leqslant y_\nu < a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geqslant 0 \\ a_\nu < y_\nu \leqslant a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 0 \end{cases} (\nu = 1, \ldots, s) \right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a},\vec{x})$ — количество точек решётки Λ, лежащих в этом параллелепипеде. В работе [3] доказана следующая лемма:

Лемма

Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, то $\det \Lambda > 1$ и для точки $\vec{a}$ и для любого локального минимума $\vec{x}_j \in B(\Lambda)$ справедливо неравенство

$$N_\Lambda(\vec{a},\vec{x}_j) \leqslant 1. \tag{11}$$

Доказательство следующей леммы существенно упростилось (см. [3]).

Лемма

Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda, \\ \overline{y}_1 \geqslant \overline{x}_{1\,j}, \ldots, \overline{y}_s \geqslant \overline{x}_{s\,j}}} \frac{1}{(\overline{y}_1 \ldots \overline{y}_s)^\alpha} \tag{12}$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) \leqslant \frac{2^s\left(1 + \frac{1}{\alpha-1}\right)^s}{(\overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j})^\alpha}.$$

Оценка мер качества

Полагаем $I_s(N) = \left[-\left[\frac{N-1}{2}\right], \left[\frac{N}{2}\right]\right]^s$ и

$$R_\Lambda(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \bigcap I_s(N), \\ \overline{y_1} \geqslant \overline{x_{1\,j}}, \ldots, \overline{y_s} \geqslant \overline{x_{s\,j}}}} \frac{1}{\overline{y_1} \ldots \overline{y_s}},$$

тогда справедлива следующая лемма.

Лемма

Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R_\Lambda(\vec{x}_j)$ справедливо неравенство

$$R_\Lambda(\vec{x}_j) \leqslant \frac{2^s}{\overline{x_{1\,j}} \ldots \overline{x_{s\,j}}} \prod_{\nu=1}^{s} (\ln N - \ln(2\overline{x_{\nu j}}) + \gamma) \leqslant \frac{2^s \ln^s N}{\overline{x_{1\,j}} \ldots \overline{x_{s\,j}}},$$

где γ — константа Эйлера.

Назовём суммой Быковского выражение вида

$$SB_N(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{\overline{x_{1\,j}} \ldots \overline{x_{s\,j}}}.$$

Theorem

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j})$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ *— все локальные минимумы из* $B(\Lambda)$, *причём* $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda) \quad (j = 1, \ldots, r^*)$ *и* $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda) \quad (j = 1, \ldots, r^*)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$2SB_N(a_1, \ldots, a_s) \leqslant S_N(a_1, \ldots, a_s) \leqslant 2^s \ln^s N \cdot SB_N(a_1, \ldots, a_s). \quad (13)$$

Положим

$$R^*_\Lambda(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda\bigcap I_s(N),\\ \overline{y_1}\geqslant\overline{x_{1\,j}},\ldots,\overline{y_s}\geqslant\overline{x_{s\,j}}}} \frac{1}{\psi(y_1)\ldots\psi(y_s)}.$$

Лемма

Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R^*_\Lambda(\vec{x}_j)$ справедливо неравенство

$$R^*_\Lambda(\vec{x}_j) \leqslant \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\overline{x_{1\,j}}\ldots\overline{x_{s\,j}})^2}.$$

Назовём суммой Быковского второго порядка выражение вида

$$SB_N^{(2)}(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{(\overline{x_{1\,j}} \ldots \overline{x_{s\,j}})^2}.$$

Theorem

Справедлива оценка

$$\left| H(N, \vec{a}) - \left(1 + \frac{2}{N^2}\right)^s \right| \leqslant \frac{\pi^{2s}}{2^{s-1}} \cdot SB_N^{(2)}(a_1, \ldots, a_s).$$

В работе [4] доказано, что локальное отклонение параллелепипедальной сетки оценивается через основную меру качества

$$\left| D_s\left(\frac{n_1}{p}, \ldots, \frac{n_s}{p}\right) \right| \leqslant S_p(1, a_1, \ldots, a_{s-1}) \tag{14}$$

и следовательно для неё выполняется оценка сверху аналогичная (13).

В работе [4] получено интересное выражение для конечного отклонения парраллелепипедальной сетки

$$D_p = \max_{1\leqslant n_\nu \leqslant p\,(1\leqslant \nu\leqslant s)}$$

$$\left| \sum_{m_2,\ldots,m_s=-p_1,\; m_2a_1+\ldots+m_sa_{s-1}\not\equiv 0 \pmod p}^{p_2}{}^{'\ldots'} \left(\prod_{\nu=2}^{s} \frac{\sin\left(\pi\frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p\sin\left(\pi\frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{\sin\left(\pi\frac{n_1(m_2a_1+\ldots+m_sa_{s-1})}{p}\right)}{p\sin\left(\pi\frac{m_2a_1+\ldots+m_sa_{s-1}}{p}\right)} \cdot$$

$$\left. \cdot\cos\left(\pi\frac{-(n_1-1)(m_2a_1+\ldots+m_sa_{s-1})+(n_2-1)m_2+\ldots+(n_s-1)m_s}{p}\right)\right| +$$

$$+\theta\frac{sB(2\ln p + 2\gamma - 2\ln 2 + 1)^{s-1}}{p},$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Доклад окончен.

Благодарю за внимание!

Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т.3 вып. 2(4) С. 27–33.

Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Докл. РАН. 2003. Т. 389. N.2. С. 154 — 155.

Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. VI Междунар. конф., посвященной 100-летию Н. Г. Чудакова (Саратов, 13 — 17 сентября 2004 г.). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 47.

Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 5 вып. 3(11). С. 15 — 17.

О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.

- Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
- Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
- Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.
- Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193 — 201.
- Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1, 2015. С. 22–29.