О двумерных решетках сравнений[1]

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Москва, 11 ноября 2022

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

Основным направлением исследованием Тульской школы теории чисел является развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе.
Этот метод был основан в 1957 году профессором Н. М. Коробовым, которому за цикл работ в этой области в 1958 году была присуждена премия имени П. Л. Чебышёва.
Необходимо отметить, что данный цикл работ Н. М. Коробова в полной мере соответствует принципам П. Л. Чебышёва, так как этот метод возник из потребностей отечественного атомного проекта.

Неравномерные сетки $M(P; b_1, \ldots, b_s)$ имеют простой вид. Для любого набора целых $b_1, \ldots, b_s$, взаимно простых с P $((b_j, P) = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, s))$ неравномерная сетка $M(P; b_1, \ldots, b_s)$ состоит из точек, координаты которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k = \left(\left\{ \frac{b_1 k}{P} \right\}, \left\{ \frac{b_2 k^2}{P} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{b_s k^s}{P} \right\} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, P), \quad (1)$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, $p > s$.

Параллелепипедальные сетки

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \qquad (k = 1, 2, \dots, p), \qquad (2)$$

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки (1), но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1 \ (j = 1, 2, \dots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \dots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$.

Основная мера качества

$S_p(z_1, \ldots, z_s)$ выражается через сумму[2]

$$S_p(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -p_1}^{p_2}{}' \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \qquad (3)$$

где $z_1, \ldots, z_s$ – произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m, $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \qquad (4)$$

.

[2] Здесь $\sum{}'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Определение

Согласно определению, *если существуют константы* $\beta = \beta(s)$ *и* $B = B(s)$ *такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений* p *выполняется неравенство*

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \leqslant B \frac{\ln^{\beta} p}{p}, \tag{5}$$

то целые $a_1, \ldots, a_s$ *называются оптимальными коэффициентами индекса* β *по модулю* p.

Оценки снизу

Известно (см.[3] стр. 81), что для любых целых $a_1, \ldots, a_s$ выполняется оценка

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \geqslant B_0 \frac{\ln^s p}{p}, \tag{6}$$

с некоторой константой B_0.
Отметим, что основная мера качества является нормой линейного функционала приближенного суммирования на классе $E_{s,p}$ и, как показал И. Ф. Шарыгин [9], ни при каком выборе сетки эту оценку улучшить нельзя.

Среднее арифметическое меры качества

Для $\sigma(N)$ — *среднего арифметического основной меры качества набора коэффициентов по всем параллелепипедальным сеткам*, заданного равенством

$$\sigma(N) = \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_s=1 \\ (a_\nu,N)=1\ (\nu=1,\ldots,s)}}^{N-1} S_N(a_1,\ldots,a_s), \tag{7}$$

и для любого составного модуля N справедливо асимптотическое равенство

$$\sigma(N) = \frac{2^s \ln^s N}{N} + O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N}\right). \tag{8}$$

Доказательство этой асимптотической формулы достаточно сложно (см. [6], [1], [2]). Из неё следует существование оптимальных коэффициентов для любого составного модуля N.

Классы функций

В данном разделе рассматриваются вопросы приближенного интегрирования функций многих переменных по единичному $s-$мерному кубу $\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\}$, $G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\}$ по методу К. К. Фролова [5], [6] в модификации Н. М. Добровольского ([1] — [6]) для непрерывных периодических функций с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Обозначения

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$. Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \ldots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \,|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$.

Обобщённая параллелепипедальная сетка

Напомним определения трех типов обобщенных параллелепипедальных сеток: $M(\Lambda)$, $M_1(\Lambda)$ и $M'(\Lambda)$ решетки Λ (см. [3], [3] стр. 204), которые определяются через взаимную решетку $\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$.

Определение

Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.
Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.
Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Весовая функция

Модификация Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова опирается на следующую общую конструкцию (см. [3], [3] стр. 247–248).

Определение

Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x}\in G_s,$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x}\notin(-1;1)^s,$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right| \leqslant B\cdot(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma}\in\mathbb{R}^s.$$

Квадратурная формула

Определение

Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ *называется формула вида*

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f], \qquad (9)$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda),\{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ *— погрешность квадратурной формулы.*

Погрешность интегрирования

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant C \cdot B \cdot c_1(\alpha)^s \cdot \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

где $$c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda}{}' (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Определение

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую решетку $\Lambda + \vec{z}$ и дадим следующие определения.

Определение

Для произвольной решетки Λ и произвольного $\vec{z}$ модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество

$$M(\Lambda, \vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap G_s.$$

Сетка $M_1(\Lambda, \vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap [-1; 1)^s$.
Модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество
$M'(\Lambda, \vec{z}) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda, \vec{z})\}$.

Модифицированная квадратурная формула

Определение

Квадратурной формулой с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ *назовем формулу вида*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda, \vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda, \vec{z})}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda, \vec{z}), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda, \vec{z}) = |M'(\Lambda, \vec{z})|,$$

$R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Квадратурные формулы с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется решетка Λ и её подрешетка $\Lambda_1 \subset \Lambda$ и $t = \dfrac{\det \Lambda_1}{\det \Lambda}$ — индекс подрешетки Λ_1 решетки Λ. Обозначим через $K(\Lambda, \Lambda_1)$ полный набор представителей по одному из каждого класса решетки Λ по подрешетке Λ_1, тогда $|K(\Lambda, \Lambda_1)| = t$ и справедливо представление

$$\Lambda = \bigcup_{\vec{z} \in K(\Lambda, \Lambda_1)} (\Lambda_1 + \vec{z}).$$

Переходя к взаимным решеткам получим: $\Lambda^* \subset \Lambda_1^*$,

$$\Lambda_1^* = \bigcup_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*, \Lambda^*)} (\Lambda^* + \vec{z}), \quad M'(\Lambda_1) = \bigcup_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*, \Lambda^*)} M'(\Lambda, \vec{z}).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} \left((\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] \right), \tag{10}$$

$$R_{N'(\Lambda_1)}[f] = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]. \tag{11}$$

Формулы (10) — (11) являются основой для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [3], стр. 192, 193).

Определение

Для концентрической пары обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(\Lambda) \subset M'(\Lambda_1)$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину

$$\Delta = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z} \in K(\Lambda_1^*, \Lambda^*)} |R_{N'(\Lambda, \vec{z})}[f] - R_{N'(\Lambda_1)}[f]|^2. \tag{12}$$

Нетрудно понять, что определение 6 согласуется с аналогичным определение из работы [3] (см. стр. 204), так как сетка $M'(\Lambda_1)$ является произведением сетки $M'(\Lambda)$ и сетки $K(\Lambda_1^*, \Lambda^*)$.

Алгебраические сетки

Назовём вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ целым алгебраическим, если многочлен $f_{\vec{\lambda}}(x) = (x - \lambda^{(1)}) \ldots (x - \lambda^{(s)}) \in \mathbb{Z}[x]$.
Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1 = n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором. Решётка Λ называется алгебраической, если любой вектор $\vec{\lambda} \in \Lambda$ будет алгебраическим вектором.
В работе [4] показано, что для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.
Отсюда следует, что множество алгебраических сеток всюду плотно в метрическом пространстве обобщенных параллелепипедальных сеток. В настоящее время изучена только гиперболическая дзета-функция растянутой алгебраической решётки, соответствующей кольцу целых алгебраических чисел произвольного чисто вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем

Гиперболическая дзета-функция решёток

Гиперболическая дзета-функция в общем виде была определена в работе [1].

Определение

Гиперболической дзета-функции решёток $\zeta(\Lambda|\alpha)$ *называется функция, которая задаётся в правой полуплоскости* $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ *дзета рядом*

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \qquad (13)$$

Здесь символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Нерешённые проблемы

В работе [2] были выделены следующие основные направления современных исследований:

1. Проблема правильного порядка убывания гиперболической дзета-функции при $\alpha \to \infty$;
2. Проблема существования аналитического продолжения в левую полуплоскость $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma \leqslant 1)$ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$;
3. Аналитическое продолжение для случая решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$;
4. Аналитическое продолжение для случая решётки совместных приближений;
5. Аналитическое продолжение для случая алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$;
6. Аналитическое продолжение для случая произвольной решётки Λ.;

1. Проблема поведения гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в критической полосе;
2. Проблема значений тригонометрических сумм сеток.

Мы остановимся на работах В. А. Быковского [2], [3] в которых Виктор Алексеевич дал принципиально новые оценки сверху и снизу гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения, совпадающие по порядку. Эти оценки уточняют теорему С. Н. Бахвалова из работы [1].

Минимальное множество Быковского

Рассмотрим сравнение

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \qquad (14)$$

относительно целочисленных переменных $m_1, \ldots, m_s$. Его ненулевое решение называется минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m_1', \ldots, m_s')$, для которого

$$|m_1'| \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s'| \leqslant |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Множество всех минимальных решений сравнения (14) будем обозначать через $B_N(a_1, \ldots, a_s)$.

Нетрудно показать, что при $(|n_1|+1)\ldots(|n_s|+1) > N$ сравнение (14) имеет хотя бы одно ненулевое решение $m_1,\ldots,m_s$ такое, что

$$|m_1| \leqslant |n_1|,\ldots,|m_s| \leqslant |n_s|.$$

Поэтому для любого минимального решения выполняется неравенство $\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s \leqslant N$, где для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1,|x|)$. Отсюда следует конечность $B_N(a_1,\ldots,a_s)$ — множества всех минимальных решений. Нетрудно видеть, что для решетки $\Lambda(a_1,\ldots,a_s;N)$ — решений сравнения (14) множество $B_N(a_1,\ldots,a_s)$ минимальных решений сравнения совпадает с множеством локальных минимумов. Как показано в работах [3], [4] множество локальных минимумов конечно, тогда и только тогда, когда решётка подобна целочисленной решётки, а значит является декартовой.

В работе [5] предложено соответствующая трансформация минимального множества Быковского.
Рассмотрим в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ произвольную решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$, который является линейно независимой системой векторов:

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left\{ m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \,\middle|\, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ненулевая точка $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in \Lambda$ называется локальным минимумом второго рода, если не существует другой ненулевой точки $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in \Lambda$, для которой

$$\overline{y_1} \leqslant \overline{x_1}, \ldots, \overline{y_s} \leqslant \overline{x_s}; \quad \overline{y_1} + \ldots + \overline{y_s} < \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_s}.$$

Минимальным множеством решётки Λ назовем множество $B(\Lambda)$, состоящее из всех локальных минимумов $\vec{x}$ второго рода.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто.
Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant r,\ \ r = r(\Lambda))$ есть все локальные минимумы второго рода из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ. Так как для любого локального минимума второго рода $\vec{x}$ точка $-\vec{x}$ также является локальным минимумом второго рода, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество локальных минимумов второго рода, где из каждой пары $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ взят ровно один. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \bigcup -B^*(\Lambda). \tag{15}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$.

Будем предполагать, что нумерация локальных минимумов согласована с разбиением (15): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$ и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r^*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j}.$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a}, \vec{x})$ прямоугольный $s-$мерный полуоткрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a}, \vec{x}) = \left\{ \vec{y} \;\middle|\; \begin{cases} a_\nu \leqslant y_\nu < a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geqslant 0 \\ a_\nu < y_\nu \leqslant a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 0 \end{cases} (\nu = 1, \ldots, s) \right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x})$ — количество точек решётки Λ, лежащих в этом параллелепипеде.

Простейший случай

Полагаем $\vec{1} = (1, \dots, 1)$, $G_s = [0, 1)^s$ — полуоткрытый единичный s-мерный куб, $K_s = [-1, 1]^s$ — s-мерный куб объёма 2^s, $N(\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ, лежащих в этом кубе. Следующая лемма в другой формулировке была доказана в [1].

Лемма

Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) = 1$, то $B(\Lambda) \subset K_s$, $|B(\Lambda)| = r(\Lambda) = N(\Lambda)$ и справедливы оценки

$$N(\Lambda) < \zeta_H(\alpha|\Lambda) < N(\Lambda)\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s. \qquad (16)$$

Общий случай

Более сложный и важный случай описан следующей леммой.

Лемма

Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, *то* $\det \Lambda > 1$ *и для точки* $\vec{a}$ *и для любого локального минимума* $\vec{x}_j \in B(\Lambda)$ *справедиво неравенство*

$$N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x}_j) \leqslant 1. \tag{17}$$

Начиная с этого места, мы рассматриваем только решётки с $\det \Lambda > 1$ и $q(\Lambda) > 1$.

Будим использовать покоординатное умножение двух точек: $\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1\cdot y_1,\ldots,x_s\cdot y_s)$.
Доказательство следующей леммы существенно упростилось (см. [3]).

Лемма

Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j)=\sum_{\substack{\vec{y}\in\Lambda,\\ \overline{y}_1\geqslant\overline{x}_{1\,j},\ldots,\overline{y}_s\geqslant\overline{x}_{s\,j}}}\frac{1}{(\overline{y}_1\ldots\overline{y}_s)^\alpha}\qquad(18)$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j)\leqslant\frac{2^s\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s}{(\overline{x}_{1\,j}\ldots\overline{x}_{s\,j})^\alpha}.$$

Обобщённая оценка Быковского

Теорема

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j})$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ *— все локальные минимумы из* $B(\Lambda)$*, причём* $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda) \quad (j = 1, \ldots, r^*)$ *и* $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda) \quad (j = 1, \ldots, r^*)$*. Тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{r^*} \frac{2}{(\overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j})^{\alpha}} \leqslant \zeta_H(\alpha|\Lambda) \leqslant 2^s \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^s \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{(\overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j})^{\alpha}}. \tag{19}$$

Двумерный случай

Идеи этих работ позволили в двумерном случае существенно уточнить эти результаты, соответствующая работа вышла в 4-ом выпуске 22 тома Чебышевского сборника. Суть этих уточнений следующая.

В методе оптимальных коэффициентов профессора Н. М. Коробова [1, 2] большую роль играет гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки решений Λ линейного сравнения

$$m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s \equiv 0 \pmod N, \quad (a_j, N)=1 \quad (j=1,\ldots,s-1), \tag{20}$$

который задается равенством $q(\Lambda)=\min_{\vec{m}\in\Lambda,\ \vec{m}\neq\vec{0}} \overline{m_1}\ldots\overline{m_s}$ и $\overline{m}=\max(1,|m|)$ для любого вещественного числа m.

В общем случае вычисление гиперболического параметра решётки сравнений требует $O(N\ln^{s-1}N)$ арифметических операций (см. [3, 4]).

В работе [2] дано следующее определение.

Определение

Назовем ненулевое решение сравнения (20) минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m_1', \ldots, m_s')$*, для которого*

$$|m_1'| \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s'| \leqslant |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле непосредственно следует, что для таких решений справедливо неравенство

$$\overline{m_1} \ldots \overline{m_s} \leqslant N, \tag{21}$$

и они составляют конечное множество. Это множество будем называть минимальным множеством Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$ решётки решений сравнения (20). Через $r^{(0)}(\Lambda)$ будем обозначать количество элементов в минимальном множестве Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$.

Так как множество $B^{(0)}(\Lambda)$ — центрально симметрично относительно нулевой точки, то ровно половина точек из $B^{(0)}(\Lambda)$ имеют первую ненулевую координату положительную. Следовательно, $r^{(0)}(\Lambda)$ — четное натуральное число.
Цель — построить в случае двумерной решётки $\Lambda(a,N)$ решений простейшего линейного сравнения $m_1+am_2\equiv 0 \pmod N$ от двух переменных алгоритм вычисления гиперболического параметра $q(\Lambda(a,N))$ за $O(\ln N)$ арифметических операций и описать множество Быковского для этого случая.

Решётка $\Lambda(a,N)$ имеет простой вид:

$$\Lambda(a,N)=\{(m_1,m_2)=(xN-ay,y)|x,y\in\mathbb{Z}\}$$

и задается базисом $\vec{\lambda}_1=(-a,1)$, $\vec{\lambda}_2=(N,0)$. Детерминант решётки $\Lambda(a,N)$ равен N: $\det\Lambda(a,N)=N$.

Будем через $\Lambda(\beta)$ обозначать решётку приближений Дирихле

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q, p \in \mathbb{Z}\} = \{(q, \{q\beta\} - p) | q, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова, для любого иррационального β решётка $\Lambda(\beta)$ не является декартовой.

Определение

Точка $(q, q\beta - p)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(\beta)$, если параллелепипед $\Pi(q, q\beta - p) = [-q, q] \times [-q\beta + p, q\beta - p]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(\beta)$ кроме своих вершин.

Согласно данному определению рассматриваются только локальные минимумы в правой полуплоскости. Очевидно, что каждому локальному минимуму $(q, q\beta - p)$ из правой полуплоскости соответствует в точности один симметричный локальный минимум $(-q, -q\beta + p)$ из левой полуплоскости.

Если ограничиться случаем только рациональных $\beta > 0$, то из теории наилучших приближений второго рода следует, что множество всех локальных минимумов решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ состоит в точности из точек $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Зададим точки $\vec{\lambda}_{-1} = (0, -1)$, $\vec{\lambda}_{-2} = (1, \beta)$, которые образуют базис решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$.

Теорема

Последовательность всех локальных минимумов $\{\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_n\}$ *задается рекуррентным равенством*

$$\vec{\lambda}_m = q_m\vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2} \quad (0 \leqslant m \leqslant n), \tag{22}$$

где целое число q_m *определяется равенством*

$$q_m = \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right], \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}). \tag{23}$$

Прежде всего установим взаимно-однозначное соответствие между точками решёток $\Lambda(a, N)$ и $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$:

$$\psi : \Lambda(a, N) \longleftrightarrow \Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$$

с помощью равенства

$$\psi((xN - ay, y)) = \left(y, y \cdot \frac{a}{N} - x\right), \quad \psi^{-1}\left(q, q \cdot \frac{a}{N} - p\right) = (pN - aq, q).$$

Таким образом, взаимно-однозначное соответствие ψ задаётся линейным преобразованием с матрицей Ψ:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{a}{N} \end{pmatrix},$$

$$(xN - ay, y)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(y, y \cdot \frac{a}{N} - x\right).$$

Для решётки $\Lambda(a,N)$ определение локального минимума несколько отличается от определения 9.

Определение

Точка $(xN-ay,y)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(a,N)$, если параллелепипед $\Pi^*(xN-ay,y)=[-\overline{xN-ay},\overline{xN-ay}]\times[-\overline{y},\overline{y}]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(a,N)$ кроме своих вершин.

Заметим, что определение 8 содержит на два элемента больше минимальных решений чем определение 10 локальных минимумов. Действительно, точки $(0,N)$ и $(0,-N)$ являются минимальными решениями согласно определения 8, но не являются локальными минимумами согласно определению 10, так как если $ab\equiv 1 \pmod N$ и $|b|\leqslant \frac{N}{2}$, то решение $(-1,b)\in\Pi^*(0,N)$ и, значит, $(0,N)$ не является локальным минимумом решётки $\Lambda(a,N)$.

Будем множество локальных минимумов решётки $\Lambda(a, N)$ называть просто множеством Быковского и обозначать через $B(a, N)$, а количество элементов — через $r(a, N)$. Ясно, что $B(a, N) = B^{(0)}(\Lambda) \setminus \{(0, N), (0, -N)\}$ и $r(a, N) = r^{(0)}(\Lambda) - 2$. Нетрудно видеть, что взаимно-однозначное соответствие ψ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством Быковского $B(a, N)$ и всеми локальными минимумами решётки Дирихле $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, кроме точки $(N, 0)$, которая является локальным минимумом в решётке $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, а соответствующая ей точка $(0, N)$ не является локальным минимумом в решётке $\Lambda(a, N)$. Если через $B^*(a, N)$ обозначим множество всех локальных минимумов решётки $\Lambda(a, N)$ вида $(xN - ay, y)$ с $0 < y < N$, то будем иметь $B(a, N) = B^*(a, N) \cup -B^*(a, N)$. И из теории наилучших приближений второго рода следует следующая теорема.

Теорема

Для множества Быковского $B(a, N)$ справедливо равенство

$$B^*(a, N) = \{((-1)^m[q_{m+2}, \dots, q_n]_{(n-m-1)}, Q_m) | m = 0, \dots, n-1\},$$

$$B(a, N) = B^*(a, N) \cup -B^*(a, N).$$

Кроме этого, $r(a, N) = 2n$.

Следствие

Для гиперболического параметра $q(\Lambda(a, N))$ двумерной решётки $\Lambda(a, N)$ решений линейного сравнения справедливо равенство

$$q(\Lambda(a, N)) = \min_{0 \leqslant m \leqslant n-1} [q_{m+2}, \dots, q_n]_{(n-m-1)} \cdot Q_m.$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(a, N)) \leqslant a$ *для* $1 \leqslant a < N$, $(a, N) = 1$.

Численные эксперименты показали, что для некоторых решёток, для которых a и N невзаимно просты, получаются хорошие значения гиперболического параметра.
Качество оптимальных коэффициентов можно оценивать по величине константы Бахвалова, которую определяют как отношение гиперболического параметра к модулю N: $CB(a,N) = \frac{q(\Lambda(a,q))}{N}$. Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что эта константа не превосходит 0,5.
Наша ближайшая цель — перенести результаты работы [1] на случай решётки решений сравнения $m + dan \equiv 0 \pmod{d} N$ для $(a,N) = 1$, $d > 1$ и дать формулу для вычисления константы Бахвалова.

Решётка $\Lambda(da, dN)$ имеет простой вид:

$$\Lambda(da, dN) = \{(m_1, m_2) = (xdN - ady, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом $\vec{\lambda}_1 = (-ad, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (dN, 0)$. Детерминант решётки $\Lambda(da, dN)$ равен dN: $\det \Lambda(da, dN) = N$.

Имеем взаимно-однозначное соответствие между точками решёток $\Lambda(a, N)$ и $\Lambda\left(daN\right)$:

$$\psi : \Lambda(a, N) \longleftrightarrow \Lambda\left(da, dN\right)$$

с помощью равенств

$$\psi((xN - ay, y)) = \left(d \cdot (xN - ay), y\right),$$

$$\psi^{-1}\left(d \cdot (xN - ay), y\right) = (xN - ay, y).$$

Так как $(a, N) = 1$, то $xN - ay = 0$ только при $y = Nt$, $x = at$. Отсюда следует, что при $d > 1$ множество Быковского $B(da, dN)$ содержит две точки $(0, N)$, $(0, -N)$ и ещё подмножество $B'(da, dN) = \{(dx, y) | (x, y) \in B(a, N)\}$.

Следствие

Для гиперболического параметра $q(\Lambda(da, dN))$ *двумерной решётки* $\Lambda(da, dN)$ *решений линейного сравнения справедливо равенство*

$$q(\Lambda(da, dN)) = \begin{cases} dq(\Lambda(a, N)) & \text{при } d \leqslant \frac{N}{q(\Lambda(a,N))}, \\ N & \text{при } d > \frac{N}{q(\Lambda(a,N))}. \end{cases}$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(da, dN)) \leqslant da$ *для* $1 \leqslant a < N$, $(a, N) = 1$.

Из следствия легко следует, что для константы Бахвалова справедливо равенство

$$CB(da, dN) = \begin{cases} CB(a, N) & \text{при } d \leqslant \frac{N}{q(\Lambda(a,N))} = \frac{1}{CB(a,N)}, \\ \frac{1}{d} & \text{при } d > \frac{N}{q(\Lambda(a,N))} = \frac{1}{CB(a,N)}. \end{cases}$$

Как известно (см. [2, 5]), гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(a, N)$ задаётся равенством

$$\zeta_H(\Lambda(a, N)|\alpha) = {\sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty}}' \frac{\delta_N(m_1 + am_2)}{(\overline{m}_1 \overline{m}_2)^\alpha}, \tag{24}$$

где

$$\delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

— символ Коробова и $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x. С ней тесно связана функция $H(a; N)$, заданная формулой

$$H(a; N) = \frac{9}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - 2\frac{k}{N}\right)^2 \left(1 - 2\left\{\frac{ak}{N}\right\}\right)^2.$$

Функция $H(a; N)$, предложенная Н. М. Коробовым в работе [2], используется для определения качества оптимальных коэффициентов и для построения алгоритмов их вычисления.
В работе [2] дается конечная формула для $H(a; N)$, которая позволяет её точно вычислять за $O(\ln N)$ арифметических операций.
Так как периодическая функция $h(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$ имеет разложение в ряд Фурье

$$h(x) = 3(1 - 2\{x\})^2 = 1 + \frac{6}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left(e^{2\pi imx} + e^{-2\pi imx}\right),$$

то справедлива следующая лемма.

Лемма

Справедливы равенства

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) = \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha),$$
$$H(a;N) = 1 + \frac{4}{N^2} + \frac{36}{\pi^4}\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|2),$$

где $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана, а

$$\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Положим, как обычно, $N_1 = \left[\frac{N}{2}\right]$, $N_2 = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, тогда множество чисел

$$M(N) = \{-N_2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N_1\}$$

образуют абсолютно наименьшую полную систему вычетов по модулю N. Очевидно, что для множества Быковского $B(a, N)$ выполняется включение $B(a, N) \subset M(N)^2$.
Определим величины

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a, N)|\alpha) = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{N_1} \frac{2(\delta_N(m_1 + am_2) + \delta_N(m_1 - am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha},$$

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a, N)|\alpha) = \sum_{\max(m_1, m_2) > N_1} \frac{2(\delta_N(m_1 + am_2) + \delta_N(m_1 - am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Ясно, что $\zeta_H^{*}(\Lambda(a, N)|\alpha) = \zeta_H^{**}(\Lambda(a, N)|\alpha) + \zeta_H^{***}(\Lambda(a, N)|\alpha)$.

Лемма

Справедливо неравенство

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right).$$

Так как $\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \zeta_H^{**}(\Lambda(N-a,N)|\alpha)$, то, без ограничения общности, считаем $1 \leqslant a < \frac{N}{2}$.

Лемма

Справедливо неравенство

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant 4\zeta^2(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{Q_\nu^\alpha[q_{\nu+2},\ldots,q_n]_{(n-\nu-1)}^\alpha}.$$

Выражение

$$SB(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in B(\Lambda)} \frac{1}{(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^\alpha}$$

будем называть суммой Быковского.

Теорема

Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(a, N)$ справедливы неравенства

$$SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) + 2\zeta^2(\alpha) SB(\Lambda(a,N)|\alpha).$$

Для суммы Быковского решётки $\Lambda(a, N)$ решений линейного сравнения несложно получить двусторонние оценки.

Теорема

Для суммы Быковского справедливы неравенства

$$\frac{c_1(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha} \leqslant SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{c_2(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha},$$

где

$$c_1(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{\nu=0}^{n-1}(q_{\nu+1})^\alpha, \quad c_2(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(q_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+2}}+\frac{1}{q_\nu}\right)^\alpha.$$

Из доказанной теоремы следует, что главный член для этих сумм есть сумма α-ых степеней элементов цепной дроби для $\frac{a}{N}$ делённый на N^α.

Лемма

При $(a, N) = 1$ справедливы равенства

$$\zeta_H(\Lambda(da, dN)|\alpha) = \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\left(\frac{1}{d^\alpha}+1\right) + \frac{\zeta_H^*(\Lambda(a, N)|\alpha)}{d^\alpha},$$

$$H(da; dN) = 1 + \frac{2}{N^2}\left(\frac{1}{d^2}+1\right) + \frac{36}{\pi^4 d^2}\zeta_H^*(\Lambda(a, N)|2) =$$

$$= 1 + \frac{H(a; N) - 1 + \frac{2(d^2-1)}{N^2}}{d^2},$$

где $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана, а

$$\zeta_H^*(\Lambda(a, N)|\alpha) = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{\infty} \frac{2(\delta_N(m_1 + am_2) + \delta_N(m_1 - am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

В методе оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова остается ещё много нерешенных проблем. Центральной из них является проблема правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток. Как известно, для алгебраических сеток порядок погрешности приближенного интегрирования для класса E_s^α имеет вид

$$R_N[f] = O\left(\|f\|_{E_s^\alpha} \frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha}\right),$$

где N — количество точек алгебраической сетки, а $\|f\|_{E_s^\alpha}$ — норма функции f в Банаховом пространстве E_s^α.

Из результатов И. Ф. Шарыгина [8] следует, что это правильный порядок убывания погрешности на классе E_s^α и нижняя оценка для любых квадратурных формул имеет тот же порядок. Так как для параллелепипедальных сеток норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α в точности равна гиперболической дзета-функции целочисленной решетки Λ, то проблему правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток можно сформулировать в терминах гиперболической дзета-функции решеток следующим образом.

Существует ли бесконечная последовательность целочисленных решёток Λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *с*

$$\lim_{n\to\infty} \det \Lambda_n = \infty$$

такая, что

$$\zeta_H(\Lambda_n|\alpha) = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda_n}{\det^{\alpha} \Lambda_n}\right)?$$

Для алгебраических решеток эта формула справедлива в силу результатов К. К. Фролова (см. [5], [6], [1], [3], [1]). В силу непрерывности гиперболической дзета-функции решёток на метрическом пространстве решёток (см. [4], [6]) на классе рациональных решёток правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток достижим. Действительно, достаточно брать последовательность рациональных решёток хорошо приближающих алгебраические решётки.

Положительное решение проблемы правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток, по-видимому, очень сложная задача.

Доклад окончен.

Благодарю за внимание!

Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т.3 вып. 2(4) С. 27–33.

Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Докл. РАН. 2003. Т. 389. N.2. С. 154 — 155.

- Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения суммы и произведения (тезисы)// Материалы всероссийской конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики"ТулГУ. Тула 2002.
- Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения, суммы и произведения по приведенной системе вычетов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 8. Вып. 1. Тула, 2002. С. 10–28.
- Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. VI Междунар. конф., посвященной 100-летию Н. Г. Чудакова (Саратов, 13 — 17 сентября 2004 г.). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 47.
- Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 5 вып. 3(11). С. 15 — 17.
- О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, “Гиперболические дзета-функции сеток и решеток и вычисление оптимальных коэффициентов”, Чебышевский сб., 13:4 (2012), 4–107

Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, “Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе”, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 47–52

Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. … канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. … канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

- Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.
- Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.
- Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова, "О гиперболической дзета-функции Гурвица", Чебышевский сб., 17:3 (2016), 72–105

Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина, “Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля”, Чебышевский сб., 16:4 (2015), 100–149.

Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 19–28.

Добровольский Н. М., Родионова О. В. Об одном конечном ряде Фурье и его приложениях // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 68–70.

Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.

- Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.
- Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
- Добровольский Н. Н. Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера // Матем. заметки, 2021, Т. 109, вып. 3, С. 464–469.
- Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.
- Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

- Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.
- Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.
- Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.
- Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.
- Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Добровольский Н. М. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 165–185.
- Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та.

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

- Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
- Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
- Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.
- Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сборник 2017. Т. 18, вып. 4(64). С. 325–337.
- Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.
- Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.
- Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.
- Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4.