Диофантовы экспоненты решёток и рост многомерных аналогов неполных частных.

Э. Р. Бигушнв

Мехмат МГУ,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

11 ноября 2022

Приближение вещественного числа θ рациональными

Мера иррациональности

$$\mu(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\theta - p/q| \leqslant q^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ решений в } p/q \in \mathbb{Q}\right\}$$

Приближение вещественного числа θ рациональными

Мера иррациональности

$$\mu(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\theta - p/q| \leqslant q^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ решений в } p/q \in \mathbb{Q}\right\}$$

Через неполные частные

Для иррационального $\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, для каждой подходящей дроби $p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ верно $\frac{1}{q_n^2(a_{n+1}+2)} < \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}$. Откуда

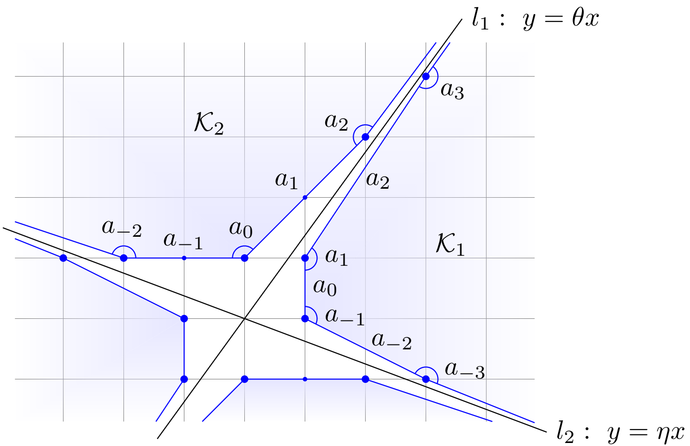
$$\mu(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall n_0 > 0 \; \exists n > n_0 : \left|\theta - p_n/q_n\right| \leqslant |q_n|^{-\gamma}\right\},$$

получаем классическое соотношение, связывающее $\mu(\theta)$ с ростом неполных частных:

$$\mu(\theta) = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}.$$

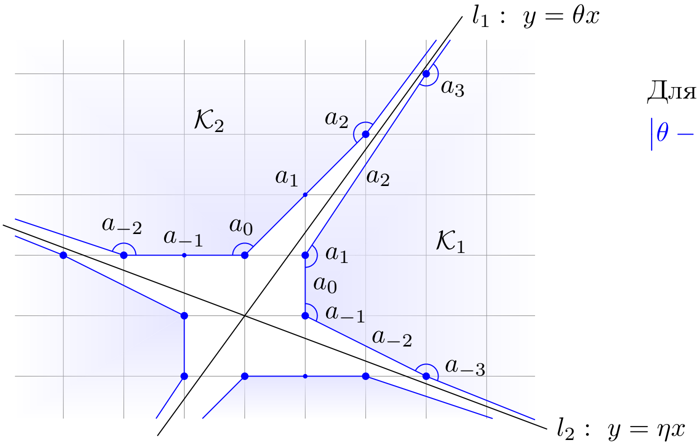
Здесь $q_0, q_1, q_2, \ldots$ — последовательность знаменателей подходящих дробей θ.

Геометрическая интерпретация цепной дроби



Полигоны Клейна для $\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, $-1/\eta = [a_{-1}; a_{-2}, a_{-3}, \ldots]$

Геометрическая интерпретация цепной дроби



Для каждой вершины (q_n, p_n)

$\left|\theta - p_n/q_n\right| \leqslant q_n^{-2}$

Полигоны Клейна для $\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, $-1/\eta = [a_{-1}; a_{-2}, a_{-3}, \ldots]$

Полигоны Клейна

Целочисленная длина

целочисленного отрезка (т.е. отрезка, концы которого имеют целые координаты) — это количество пустых целочисленных отрезков, в нём содержащихся.

Полигоны Клейна

Целочисленная длина

целочисленного отрезка (т.е. отрезка, концы которого имеют целые координаты) — это количество пустых целочисленных отрезков, в нём содержащихся.

Целочисленный угол

$$\mathrm{ang}(\mathbf{v}) = \left|\det(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right|,$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ суть примитивные целочисленные векторы, параллельные рёбрам, инцидентным вершине $\mathbf{v}$.

Мера иррациональности

Через целочисленный угол

Если $\mathbf{v} = (\pm q_n, \pm p_n)$, где p_n/q_n — подходящая дробь одного из чисел θ, η, тогда $\operatorname{ang}(\mathbf{v}) = a_{n+1}$, где a_{n+1} — неполное частное этого же числа. Получаем

$$\frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} \asymp \frac{\log(\operatorname{ang}(\mathbf{v}))}{\log|\mathbf{v}|} \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Стало быть, если обозначить через $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pm\mathcal{K}_1, \pm\mathcal{K}_2)$ множество вершин полигонов Клейна $\mathcal{K}_1$, $-\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $-\mathcal{K}_2$, то

$$\max\big(\mu(\theta), \mu(\eta)\big) = 2 + \limsup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V},\ |\mathbf{v}|>1 \\ |\mathbf{v}|\to\infty}} \frac{\log(\operatorname{ang}(\mathbf{v}))}{\log|\mathbf{v}|}.$$

Диофантова экспонента решетки

Определение

Пусть Λ — произвольная решётка в $\mathbb{R}^n$ полного ранга. Диофантовой экспонентой этой решётки называется величина

$$\omega(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists\,\infty\,\mathbf{x} \in \Lambda :\ \Pi(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|^{-\gamma}\right\},$$

где $\Pi(\mathbf{x}) = |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n|^{1/n}$.

Диофантова экспонента решетки

Определение

Пусть Λ — произвольная решётка в $\mathbb{R}^n$ полного ранга. Диофантовой экспонентой этой решётки называется величина

$$\omega(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists \infty\, \mathbf{x} \in \Lambda : \Pi(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|^{-\gamma}\right\},$$

где $\Pi(\mathbf{x}) = |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n|^{1/n}$.

Рассмотрим решётку

$$\Lambda = A\mathbb{Z}^2 = \left\{\big(L_\theta(\mathbf{z}), L_\eta(\mathbf{z})\big) \,\middle|\, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2\right\},$$

где $L_\theta(\mathbf{z}) = |z_1\theta - z_2|$ и $L_\eta(\mathbf{z}) = |z_1\eta - z_2|$.

Диофантова экспонента решетки

Переформулировка определения

$$\omega(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists \infty\, \mathbf{x} \in A(\mathcal{V}) : \Pi(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|^{-\gamma}\right\},$$

где $\mathcal{V}$ — множество вершин полигонов Клейна $\mathcal{K}_1$, $-\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $-\mathcal{K}_2$.

Диофантова экспонента решетки

Переформулировка определения

$$\omega(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\infty\, \mathbf{x} \in A(\mathcal{V}) : \Pi(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|^{-\gamma}\right\},$$

где $\mathcal{V}$ — множество вершин полигонов Клейна $\mathcal{K}_1$, $-\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $-\mathcal{K}_2$.

Для $\mathbf{w} = A\mathbf{v} = \big(L_\theta(\mathbf{v}), L_\eta(\mathbf{v})\big)$ имеем при достаточно большом $|q|$

$$\Pi(\mathbf{w})^2 = |q\theta - p| \cdot |q\eta - p| \asymp |q| \min\big(|q\theta - p|, |q\eta - p|\big) = \\ = q^2 \min\big(|\theta - p/q|, |\eta - p/q|\big)$$

и

$$|\mathbf{w}| \asymp |\mathbf{v}| \asymp |q|.$$

Стало быть, при достаточно большом $|q|$

$$\Pi(\mathbf{w}) \asymp |\mathbf{w}|^{-\gamma} \iff \min\big(|\theta_1 - p/q|, |\theta_2 - p/q|\big) \asymp q^{-2-2\gamma}.$$

Двумерная экспонента решетки

Диофантова экспонента двумерной решетки

В итоге получаем
$$\max\left(\mu(\theta_1), \mu(\theta_2)\right) = 2 + 2\omega(\Lambda).$$

Комбинируя с предыдущим равенством для меры иррациональности

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{2} \limsup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V},\ |\mathbf{v}|>1 \\ |\mathbf{v}|\to\infty}} \frac{\log(\mathrm{ang}(\mathbf{v}))}{\log|\mathbf{v}|}.$$

Формулировка основного результата

Пусть L_1, L_2, L_3 — линейно независимые линейные формы от трёх переменных. Нулевые подпространства форм L_1, L_2, L_3 разбивают $\mathbb{R}^3$ на восемь симплициальных (замкнутых) конусов. В каждом из них рассмотрим выпуклую оболочку ненулевых целых точек. Обозначим их $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, 8$ (в произвольном порядке). Эти выпуклые оболочки называются полиэдрами Клейна (соответствующими линейным формам L_1, L_2, L_3).

Формулировка основного результата

Пусть L_1, L_2, L_3 — линейно независимые линейные формы от трёх переменных. Нулевые подпространства форм L_1, L_2, L_3 разбивают $\mathbb{R}^3$ на восемь симплициальных (замкнутых) конусов. В каждом из них рассмотрим выпуклую оболочку ненулевых целых точек. Обозначим их $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, 8$ (в произвольном порядке). Эти выпуклые оболочки называются полиэдрами Клейна (соответствующими линейным формам L_1, L_2, L_3).

Определитель реберной звезды

$$\det \mathrm{St}_{\mathbf{v}} = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant k} |\det(\mathbf{r}_{i_1}, \mathbf{r}_{i_2}, \mathbf{r}_{i_3})|,$$

где $\mathbf{v}$ вершина $\mathcal{K}$, а $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ — примитивные целочисленные векторы, параллельные рёбрам $\mathcal{K}$, инцидентным вершине $\mathbf{v}$.

Формулировка основного результата

Теорема

Рассмотрим решётку

$$\Lambda = \Big\{ \big(L_1(\mathbf{z}), L_2(\mathbf{z}), L_3(\mathbf{z})\big) \,\Big|\, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 \Big\}.$$

Пусть формы L_1, L_2, L_3 не обращаются в нуль в ненулевых целых точках. Пусть $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_8$ — полиэдры Клейна, соответствующие этим линейным формам, и пусть $\mathcal{V}$ — множество всех их вершин. Тогда

$$\omega(\Lambda) \leqslant \frac{2}{3} \limsup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V},\ |\mathbf{v}|>1 \\ |\mathbf{v}|\to\infty}} \frac{\log(\det \mathrm{St}_{\mathbf{v}})}{\log|\mathbf{v}|}.$$

Спасибо!