

Решения типа диффузионных волн для нелинейных параболических уравнений и систем

Казаков Александр Леонидович

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск

7 ноября 2022

Рассматривается нелинейная эволюционная параболическая система второго порядка следующего вида:

$$\mathbf{U}_t = [\boldsymbol{\Xi}_1(\mathbf{U})]_{xx} + \boldsymbol{\Xi}_0(\mathbf{U}), \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ – вектор искомых функций;

t, x – независимые переменные (t – время, x – пространственная координата);

$\boldsymbol{\Xi}_0, \boldsymbol{\Xi}_1$ – заданные n -компонентные вектор-функции, которые предполагаются достаточно гладкими.

Система (1) может рассматриваться как обобщенная математическая модель различных диффузионных процессов в механике сплошных сред, включая термодиффузионный массообмен в бинарной смеси¹.

В случае гладкости вектор-функции $\boldsymbol{\Xi}_1(\mathbf{U})$ систему (1) можно можно переписать в виде

$$\mathbf{U}_t = [\boldsymbol{\Xi}'_1(\mathbf{U})\mathbf{U}_x]_x + \boldsymbol{\Xi}_0(\mathbf{U}). \quad (2)$$

¹Степанова И.В. Симметрии и решения уравнений термодиффузии для изучения режимов тепломассообмена в бинарных смесях: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05. – Томск, 2022. – 221 с.

Частным случаем (1), когда $n = 1$, $\Xi_0 \equiv \Xi_0(u)$, является обобщенное уравнение нелинейной теплопроводности (the generalized porous medium equation). При этом наиболее употребительной является функция Ξ_1 степенного вида. Если $\Xi'_1(U) = \lambda U^\sigma$, $\lambda, \sigma > 0$, то (1) (напомним, мы рассматриваем скалярный случай), можно после несложных преобразований записать в виде

$$u_t = uu_{xx} + \frac{u_x^2}{\sigma} + \xi(u). \quad (3)$$

Здесь $u = \lambda U^\sigma$, (3) – уравнение нелинейной теплопроводности с источником² (фильтрации³, the porous medium equation⁴).

²Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

³Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.

⁴Vazquez, J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.

Для уравнения (3) известен⁵ и уже неплохо изучен^{6,7} интересный класс решений, так называемые, **тепловые (диффузионные, фильтрационные) волны**, которые описывают возмущения, распространяющиеся с конечной скоростью по нулевому фону⁸. Подобные эффекты, как известно, нетипичны для уравнений и систем параболического типа. В данном случае они возникают как следствие вырождения, которое имеет место, когда искомая функция обращается в нуль.

⁵ Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посв. 70-летию А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.

⁶ Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

⁷ Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.

⁸ Казаков А.Л., Орлов С.С., Орлов С.С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018, № 3.

Наиболее важной составляющей такого рода решений является **нулевой фронт**, который разделяет фоновое (нулевое) и возмущенное (положительное) решения, формирующие рассматриваемую тепловую волну. На нулевом (тепловом, фильтрационном, диффузионном) фронте решения сстыкованы непрерывно, производные, вообще говоря, терпят разрыв.

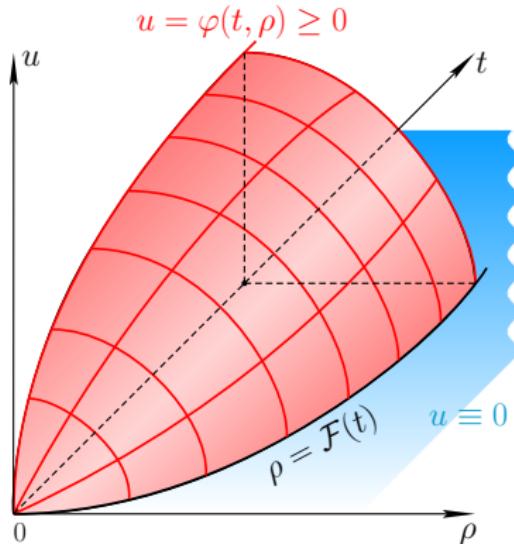


Рис. 1: Тепловая волна

Существуют ли подобные решения для систем вида (1)?

На этот вопрос можно дать утвердительный ответ. Так, для системы реакции–диффузии

$$u_t = uu_{xx} + \frac{u_x^2}{\sigma} + f(u, v), \quad v_t = vv_{xx} + \frac{v_x^2}{\delta} + g(u, v)$$

ранее были построены и исследованы решения, имеющие тип диффузионной волны⁹.

Тем не менее, вопрос о том, каким условиям должна удовлетворять система (1) для того, чтобы такие решения существовали, пока остается открытым.

Цель настоящего исследования – продвинуться в решении данной проблемы.

⁹Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сиб. журн индустр. мат. 2021, № 4.

Рассмотрим систему (1) в случае, когда компоненты вектора Ξ_1 имеют вид

$$\Xi'_{1_k}(\mathbf{U}) = \lambda_k U_k^{\sigma_k}, k = 1, \dots, n,$$

где λ_k, σ_k – положительные константы.

В результате замены $u_k = \lambda_k U_k^{\sigma_k}$ система преобразуется к виду

$$(u_k)_t = u_k(u_k)_{xx} + \frac{(u_k)_x^2}{\sigma_k} + f_k(u_1, \dots, u_n), \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Для (4) зададим следующие краевые условия:

$$(u_k)|_{x=a(t)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $x = a(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Учитывая инвариантность системы (4) относительно сдвига по времени, будем далее для определенности считать, что $a(0) = 0$.

Сделаем в задаче (4), (5) замену независимых переменных

$$z = x - a(t), \quad t' = t,$$

в результате чего она преобразуется к виду

$$(u_k)_t = u_k(u_k)_{zz} + \frac{(u_k)_z^2}{\sigma_k} + a'(t)(u_k)_z + f_k(u_1, \dots, u_n), \quad (6)$$

$$(u_k)|_{z=0}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Штрих у переменной t для удобства обозначений здесь и далее опускается. Задачи (6), (7) и (4), (5) эквивалентны.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- ① Функции f_k являются аналитическими в некоторой окрестности т. $O(0, \dots, 0)$ и обладают свойством $f_k(O) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$
- ② Функция $a(t)$ является аналитической в некоторой окрестности т. $t = 0$ и обладает свойством $a'(0) \neq 0.$

Тогда у задачи (4), (5) существует единственное аналитическое решение, удовлетворяющее условиям $(u_k)_z|_{x=0, t=0} \neq 0.$

Доказательство теоремы проводится в два этапа.

1. Строится решение в виде характеристического ряда.
2. Доказывается его сходимость.

Отметим, что в силу условия теоремы, функции f_k и a разложимы в ряды Тейлора в окрестности точек O и $t = 0$ соответственно.

ПЕРВЫЙ ЭТАП.

Решение задачи (6), (7) будем строить в виде рядов Тейлора, которые в данном случае являются характеристическими

$$u_k(t, z) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{k,i}(t) \frac{z^i}{i!}, \quad u_{k,i}(t) = \left. \frac{\partial^i u_k}{\partial z^i} \right|_{z=0}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Построение проводится индукцией по i .

Из условий (7) следует, что при $i = 0$ справедливы равенства $u_{k,0}(t) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Далее положим в системе (6) $z = 0, u_k = 0$. получим, что

$$\frac{u_{k,1}^2}{\sigma_k} + a'(t)u_{k,1} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Квадратное уравнение (7) имеет два корня

$$u_{k,1} = 0, \quad u_{k,1} = -\sigma_k a'(t), \quad (10)$$

однако только второй (ненулевой) корень удовлетворяет условию теоремы. Итак, $u_{k,1}(t) = -\sigma_k a'(t)$, $k = 1, \dots, n$.

Таким образом, база индукции установлена.

Пусть найдены $u_{k,i}(t)$, $k = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m > 1$.

Для того чтобы найти $u_{k,m+1}$, продифференцируем систему (6) m раз по z и положим $z = 0$, $u|_{z=0} = 0$. Получим уравнение с одной неизвестной, разрешив которое относительно $u_{k,m+1}$, получим равенство

$$u_{k,m+1} = \frac{1}{a'(1+m\sigma)} \left[\sum_{j=2}^m \left(C_m^j + \frac{1}{\sigma} C_m^{j-1} \right) u_j u_{m+2-j} - u'_{k,m} + f_{k,m} \right]. \quad (11)$$

Здесь $f_{k,m} = \partial^m f / \partial z^m|_{z=0}$, причем дифференцирование проводится по правилу сложной функции.

Воспользуемся предположением индукции, в соответствии с которым все слагаемые в правой части известны. Таким образом, по формулам (11) можно найти все

$u_{k,m+1}$, $k = 1, \dots, n$.

Причем, они определяются единственным образом.

Коэффициенты рядов (8) получены, первый этап доказательства завершен.

ВТОРОЙ ЭТАП. Сходимость рядов доказывается методом мажорант. Для всех искомых функций строится общая мажоранта, $W(t, z) >> u_k(t, z)$, $k = 1, \dots, n$.

Мажорантная задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial H_2(t, W_t, W)}{\partial z} + H_1(t, W_z) + zH_0(t, z, W, W_z, W_{zz}), \quad (12)$$

$$W|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z|_{z=0} = W_1(t). \quad (13)$$

Здесь H_0, H_1, H_2 – аналитические мажорирующие нуль функции своих аргументов.

Задачу (12), (13) можно привести к типу Ковалевской, продифференцировав (12) по z , разрешив полученное выражение относительно W_{zzz} и добавив третье граничное условие $W_{zz}(t, 0) = W_2(t)$, которое получается, если в (12) положить $z = 0$. Полученная задача подпадает под действие теоремы Коши-Ковалевской и имеет единственное аналитическое решение, мажорирующее нуль. Отсюда следует, что ряды (8) сходятся ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Замечание 1

Можно без труда убедиться, что, выбирая нулевые корни уравнения (9), мы получим тривиальное $u_k \equiv 0, k = 1, \dots, n$ решение задачи (6), (7), которое вкупе с положительной частью решения, полученного при доказательстве теоремы, образует **диффузионную волну** с фронтом $x = a(t)$.

Но что же будет, если при построении рядов (8) частично использовать положительные, а частично — отрицательные корни уравнения (9)?

Оказывается, все будет зависеть от конкретной постановки задачи. Формальное решение для заданного набора корней будет строиться, причем однозначно (это следует из доказательства теоремы), однако ряды (8) в при этом могут как сходиться в некоторой области, так и расходиться всюду, за исключением начала координат.

Пример 1. Положим в задаче (4), (5) $n = 2$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $\sigma_2 = \sigma$, $\sigma_2 = \delta$, $f_1 = 0$, $f_2 = u$. $a(t) = -ct$, $c > 0$ – const. Задача примет вид

$$u_t + cu_z = uu_{zz} + \frac{1}{\sigma}u_z^2, \quad v_t + cv_z = vv_{zz} + \frac{1}{\delta}v_z^2 + u, \quad (14)$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (15)$$

Пусть справедливы соотношения

$$u_1 = -\sigma a'(t) = \sigma c, \quad v_1 \equiv 0. \quad (16)$$

Построим решение задачи (14), (15). Вид уравнений (14) позволяет находить решения последовательно. Несложно показать, что при выборе

$$u_1 = -\sigma a'(t) = \sigma c, \quad (17)$$

функция $u = \sigma cz$ будет решением задачи

$$u_t + cu_z = uu_{zz} + u_z^2/\sigma, \quad u(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (18)$$

Осталось рассмотреть задачу

$$v_t + cv_z = vv_{zz} + v_z^2/\delta + \sigma cz, \quad v(t, z)|_{z=0} = 0 \quad (19)$$

в предположении, что $v_1 \equiv 0$. Представляя решение в виде ряда

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} z^n, \quad (20)$$

находим коэффициенты

$$v_0, v_1 \equiv 0, \quad v_2 = \sigma > 0$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{c} \left[-v'_n + \sum_{k=2}^n \left(C_n^k + \frac{1}{\delta} C_n^{k-1} \right) v_k v_{n+2-k} \right], \quad n \geq 2. \quad (21)$$

Из формул (21) следует, что все коэффициенты v_n при $n \geq 2$ суть положительные константы. Следовательно, $v'_n \equiv 0$.

Покажем, что радиус сходимости R ряда (20) равен нулю.

Воспользуемся формулой Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n}{n!} \frac{(n+1)!}{v_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(n+1)}{v_{n+1}}. \quad (22)$$

Найти предел поможет оценка

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{c} \sum_{k=2}^n \left(C_n^k + \frac{1}{\delta} C_n^{k-1} \right) v_k v_{n+2-k} \geq \frac{1}{c} C_n^2 v_2 v_n = \\ &= \frac{\sigma(n-1)n v_n}{2c} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{2c(n+1)}{\sigma(n-1)n} \geq \frac{v_n(n+1)}{v_{n+1}} \geq 0. \quad (23)$$

Переходя к пределу, находим радиус сходимости ряда:

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(n+1)}{v_{n+1}} \geq 0. \quad (24)$$

Таким образом $R = 0$, и ряд (20) сходится только при $z = 0$ и задача не имеет аналитического решения.

Построение точных решений

Вернемся к уравнению (3) и предположим, что функция, задающая источник также имеет степенной вид $\xi(u) = \alpha u^\beta$. Тогда (3) примет вид

$$u_t = uu_{xx} + \frac{u_x^2}{\sigma} + \alpha u^\beta. \quad (25)$$

и будем искать нетривиальные точные решения со свободной границей, имеющие тип тепловой волны, распространяющейся с конечной скоростью по холодному фону, т.е. удовлетворяющие условию

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0, \quad (26)$$

где $a(t) > 0$ – достаточно гладкая функция.

Отметим, что на фронте тепловой волны в уравнении (3) обращается в нуль множитель перед старшей производной u_{xx} , что приводит к вырождению уравнения с понижением порядка.

Будем искать решение задачи (25), (26) в следующем виде:

$$u = \psi(t)v(z), \quad z = \varphi(t, x), \quad (27)$$

где $\psi(t)$ и $v(z)$ определяются при решении ОДУ.

Подобный подход представляет собой обобщение классического метода разделения переменных¹⁰ (метод Кларксона-Крускалла).

Будем рассматривать следующие способы задания функции $\varphi(t, x)$:

$$\varphi_1(t, x) = x - a(t), \quad \varphi_2(t, x) = x/a(t). \quad (28)$$

При этом условие (26) переписывается как $v(z_0) = 0$: в первом случае $z_0 = 0$, во втором случае $z_0 = 1$.

¹⁰ Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. М.: Изд-во Юрайт, 2017.

Теорема 2

Задача (25), (26) имеет обобщенно-автомодельные решения в случаях:

- ① $\beta = 1$, $\varphi_2(t, x) = \frac{x}{C_1 e^{C_2 t}}$, $\psi(t) = C_1^2 C_2 e^{2C_2 t}$, а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + zv' + (2 + \alpha)v = 0, \quad v(1) = 0. \quad (29)$$

- ② $\beta \neq 1, 2$; $\varphi_2(t, x) = \frac{x}{(C_3 t + C_4)^\omega}$,
 $\psi(t) = \omega C_3 (C_3 t + C_4)^{2/(2-2\beta)}$, где $\omega = (\beta - 2)/(2\beta - 2)$ а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + zv' + \frac{2}{2-\beta}v + \alpha v^\beta = 0, \quad v(1) = 0. \quad (30)$$

Иных решений данного типа задача (25), (26) не имеет.

Теорема 3

Задача (25), (26) имеет решения типа обобщенной бегущей волны в следующих случаях:

- ① $\beta = 2$, $\varphi_1(t, x) = x - \ln(C_5 t + C_6)^\omega$,
 $\psi(t) = \omega C_5 / (C_5 t + C_6)$, а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \frac{1}{\omega}v + \alpha v^2 = 0, \quad v(0) = 0. \quad (31)$$

- ② $\beta = 2$, $\varphi_1(t, x) = x - (C_7 t - C_8)$, $\psi(t) = C_7$, а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \alpha v^2 = 0, \quad v(0) = 0. \quad (32)$$

Иных решений данного типа задача (25), (26) не имеет.

Замечание

Уравнения (31), (32) могут быть записаны совместно в виде

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \kappa v + \alpha v^2 = 0, \quad (33)$$

где $\kappa = 1/\omega$ в случае (31), либо $\kappa = 0$ в случае (32).

Задача без источника $\alpha = 0$

$$u_t = uu_{xx} + \frac{u_x^2}{\sigma}. \quad (34)$$

Следствие 1. Задача (34), (26) имеет точные решения¹¹ в следующих случаях:

- ① $\varphi_2(t, x) = x/[C_1 e^{C_2 t}]$, $\psi(t) = C_1^2 C_2 e^{2C_2 t}$, а $v(z)$ удовлетворяет задаче

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + zv' + 2v = 0, \quad v(1) = 0. \quad (35)$$

- ② $\varphi_2(t, x) = x/(C_3 t + C_4)^\omega$, $\psi(t) = \omega C_3 (C_3 t + C_4)^{2\omega-1}$,

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + zv' + \frac{2\omega - 1}{\omega}v = 0, \quad v(1) = 0. \quad (36)$$

- ③ $\varphi_1(t, x) = x - \ln(C_5 t + C_6)^\omega$, $\psi(t) = \omega C_5 / (C_5 t + C_6)$,

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + v' + \frac{1}{\omega}v = 0, \quad v(0) = 0. \quad (37)$$

¹¹Казаков А.Л., Орлов Св.С., Орлов С.С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560.

Выполним качественное исследование уравнения (33). Оно является автономным, перейдем к рассмотрению фазовой плоскости ($v, v' = w$).

Уравнению (33) соответствует динамическая система¹²

$$\frac{dv}{d\zeta} = vw, \quad \frac{dw}{d\zeta} = -\frac{w^2}{\sigma} - w - \alpha v^2 - \kappa v, \quad (38)$$

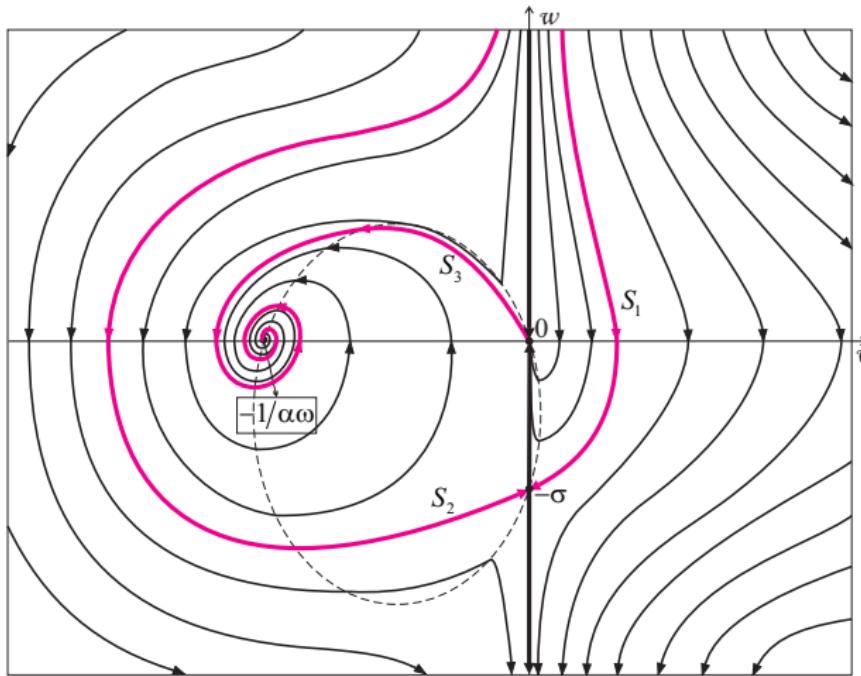
где $dz = v d\zeta$.

Возможны следующие случаи:

- 1) если $\kappa \neq 0$, то имеется три состояния равновесия: $(0, -\sigma)$ – седло; $(0, 0)$ – седло-узел с одним узловым и двумя седловыми секторами; $(-\kappa/\alpha, 0)$ – устойчивый фокус, либо устойчивый узел.
- 2) если $\kappa = 0$, то имеется два состояния равновесия: $(0, -\sigma)$ – седло; и $(0, 0)$ – сложный узел ($\alpha > 0$).

¹²Баутин Н.Н., Леонович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.

Исследование фазового портрета

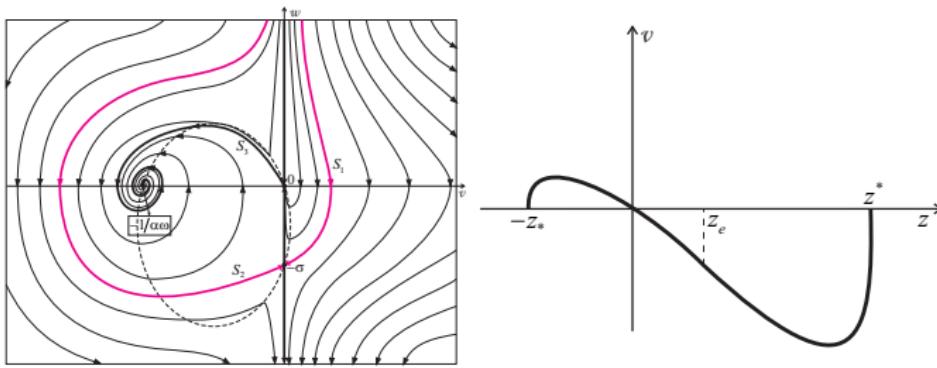


По виду фазовых траекторий S_1 , S_2 и S_3 можно описать поведение решений задачи Коши (зК) для (29): $S_1 \cup S_2$ соответствует решению при

$$v(0) = 0, v'(0) = -\sigma \quad (39)$$

Решение зК (29), (39) существует на некотором интервале $(-z_*, z^*)$ и не может быть продолжено за его границы, при этом

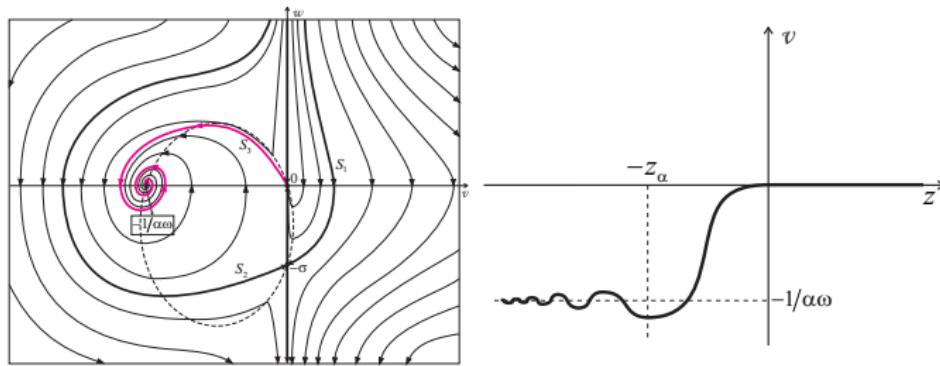
$$v|_{z=z^*} = v|_{z=-z_*} = 0, \lim_{z \rightarrow -z_* + 0} v'(z) = +\infty, \lim_{z \rightarrow -z^* - 0} v'(z) = -\infty. \quad (40)$$

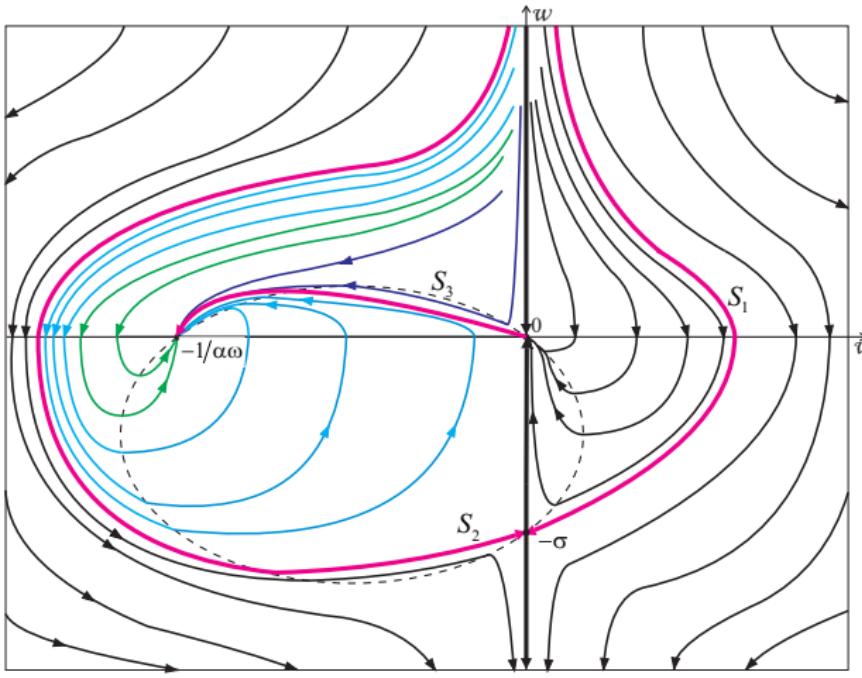


Сепаратриса S_3 соответствует нетривиальному решению при

$$v(0) = 0, v'(0) = 0 \quad (41)$$

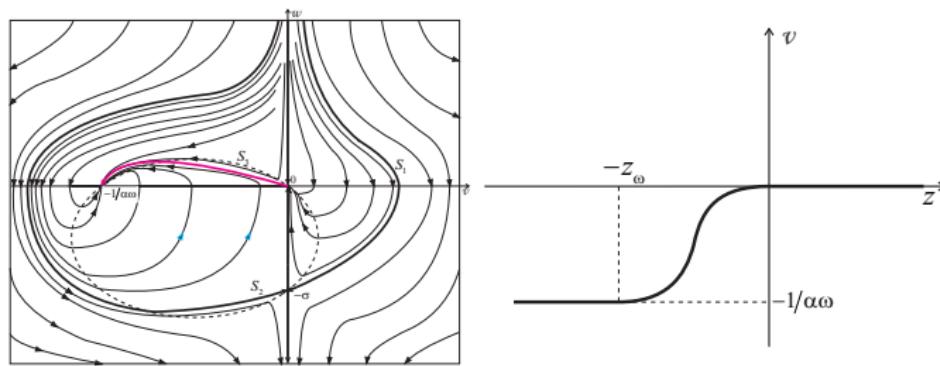
Решение зК (29), (41) на интервале $(-z_\alpha, 0)$ монотонно возрастает, а далее – при $z < -z_\alpha, z \rightarrow -\infty$ немонотонно приближается к горизонтальной асимптоте $v = -1/(\alpha\omega)$.

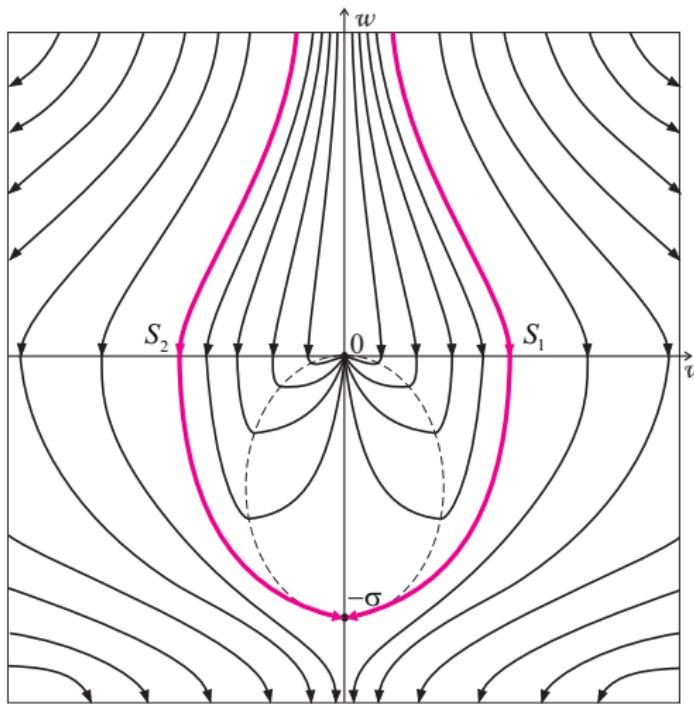




Сепаратриса S_3 соответствует нетривиальному решению зК (29), (41)

Решение на интервале $(-z_\omega, 0)$ монотонно возрастает, а далее, при $z > -z_\omega$, может быть продолжено прямой $v = -1/(\alpha\omega)$ (с непрерывными производными).

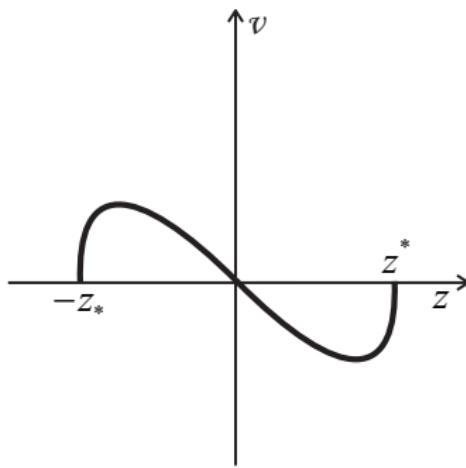




Сепаратриса $S_1 \cup S_2$ соответствует решению зК (29), (39), причем последнее существует на некотором симметричном интервале $(-z_*, z_*)$ и не может быть продолжено за его пределы, $v(z) = -v(-z)$.

Более того, $v|_{z=\pm z_*} = 0$, $\lim_{z \rightarrow \pm z_* \mp 0} v'(z) = \mp\infty$.

Точной перегиба здесь является $z_e = 0$. К особой точке M_0 стремятся только полусепаратрисы, совпадающие с осью Ow , поэтому зК (29), (41) в данном случае имеет только тривиальное решение.



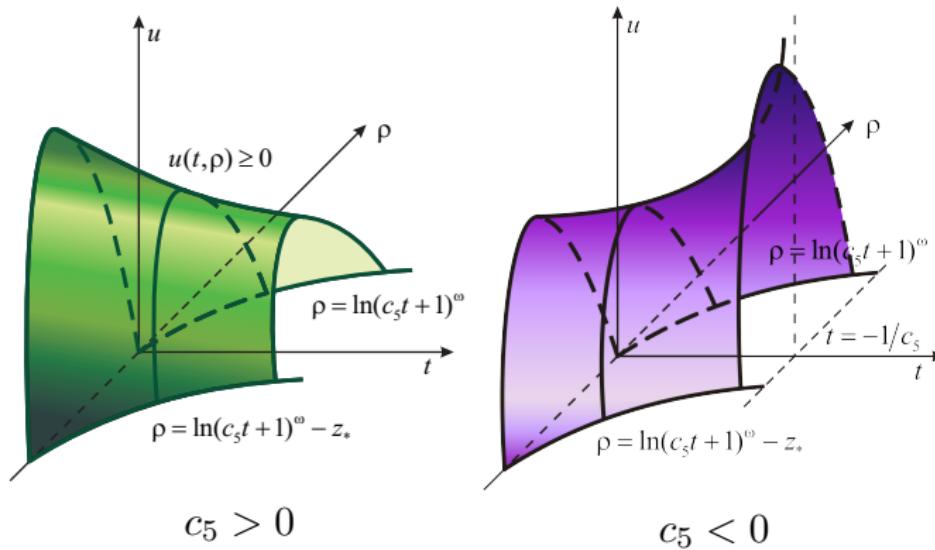
Теорема 4

1. Задача Коши (33), (39) в случае $\alpha > 0$ имеет единственное решение $v(z) \in C_{[-z_*, z^*]} \cap C^2_{(-z_*, z^*)}$.
2. Задача Коши (33), (41) в случае $\alpha > 0, \kappa > 0$ имеет единственное нетривиальное решение $v(z) \in C_{(-\infty, 0]} \cap C^2_{(-\infty, 0)}$.

Тепловая волна с логарифмическим фронтом

Рассмотрим $a(t) = \ln(c_5 t + 1)^\omega$. Тогда

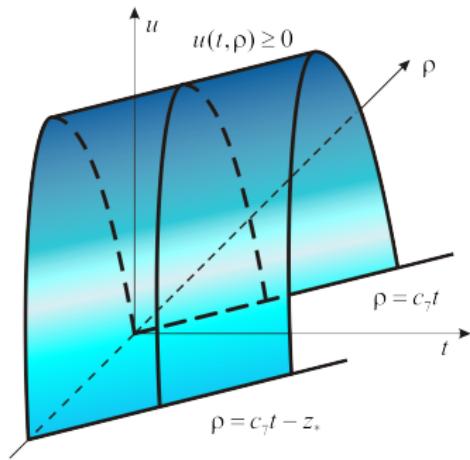
$$u(t, \rho) = \frac{\omega c_5 v(z)}{c_5 t + 1}, \quad z = \rho - \omega \ln(c_5 t + 1). \quad (42)$$



Тепловая волна с линейным фронтом

Рассмотрим $a(t) = c_7 t$, $c_7 > 0$. Тогда

$$u(t, \rho) = c_7 v(z), \quad z = \rho - c_7 t. \quad (43)$$



- ① Получены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры при наличии источника (стока) со степенной зависимостью последнего от температуры.
- ② Исходная задача сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с начальными условиями, предполагающими вырождение уравнений. Доказаны теоремы существования и единственности локально-аналитических решений указанных начальных задач.
- ③ Методами качественной теории дифференциальных уравнений установлена нелокальная разрешимость соответствующих задач Коши в классе функций конечной гладкости, изучены поведение и глобальные свойства решений.
- ④ Полученные результаты интерпретированы с точки зрения исходной задачи о движении тепловой волны. Показано, что в случае логарифмического теплового фронта решение имеет вид уединенной волны, амплитуда которой (в зависимости от выбора направления движения) может либо затухать, стремясь к нулю при $t \rightarrow +\infty$, либо возрастать, стремясь к бесконечности при $t \rightarrow \text{const}$ (HS-режим с обострением). Для линейного теплового фронта решение имеет вид солитона, движущегося по холодному фону с постоянной скоростью.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!