

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Докладчик: Кузнецов Павел Александрович*

Вторая конференция Математических центров России
7-11 ноября 2022 г., Москва

*Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

Система «хищник-жертва»

В настоящем исследовании рассмотрена система

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + v_x u_x) + f(u, v), \\ v_t &= \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x) + g(v, u), \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha_{1,2}, \beta_{1,2} &\in \mathbb{R}, \\ \beta_{1,2} &\neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t, x — независимые переменные; $u(t, x)$ и $v(t, x)$ — искомые функции; f, g — известные функции, которые предполагаются достаточно гладкими, причем $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

Система «хищник-жертва»

Система (1) имеет, вообще говоря, параболический тип и используется в биологии¹ при описании популяционной динамики двух взаимодействующих видов — хищников v и жертв u .

Такая система типа «хищник-жертва» обобщает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, лежащую в основе хорошо известной модели Лотки-Вольтерра²:

$$\begin{aligned}x' &= kx - axy, \\y' &= -ly + bxy,\end{aligned}\quad a, b, k, l \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

¹Murray J.D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. Interdisciplinary applied mathematics. Vol. 18. New York: Springer. 2003.

²Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО. 2012.

Нелинейные системы с вырождением

Эволюционные уравнения и системы параболического типа часто лежат в основе популярных моделей различных конвективных^{3,4} и реакционно-диффузионных процессов^{5,6}. Также подобные объекты широко применяются в математической биологии^{7,8}, а также при моделировании распространения загрязняющих примесей⁹.

³Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит. 2008.

⁴Bergman T.L., Lavine A.S., Incopera F.P., Dewitt D.P. Fundamentals of heat and mass transfer. New-York: John Wiley & Sons. 2011.

⁵Земсков Е. П. Неустойчивость Тьюринга в реакционно-диффузионных системах с нелинейной диффузией // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2013.

⁶Gambino G., Lombardo M. C., Sammartino M., Sciacca V. Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion. Physical Review E. 2013.

⁷Murray J.D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. Interdisciplinary applied mathematics. Vol. 18. New York: Springer. 2003.

⁸Telch B. Global boundedness in a chemotaxis quasilinear parabolic predator-prey system with pursuit-evasion. 2021.

⁹Perthame B. Parabolic equations in biology. Growth, reaction, movement and diffusion. NY, Springer. 2015.

Нелинейные системы с вырождением

Система (1) относится к классу вырождающихся¹⁰ при $u = v = 0$. При этом обращаются множители при старших производных.

В этом случае у системы (1) могут существовать решения с нулевым фронтом. Яркий пример таких решений — тепловые¹¹ (фильтрационные¹², диффузионные¹³) волны, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью.

¹⁰DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations. NY: Springer-Verlag. 1993.

¹¹Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука. 1987.

¹²Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит. 2001.

¹³Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020.

Пример решения с нулевым фронтом

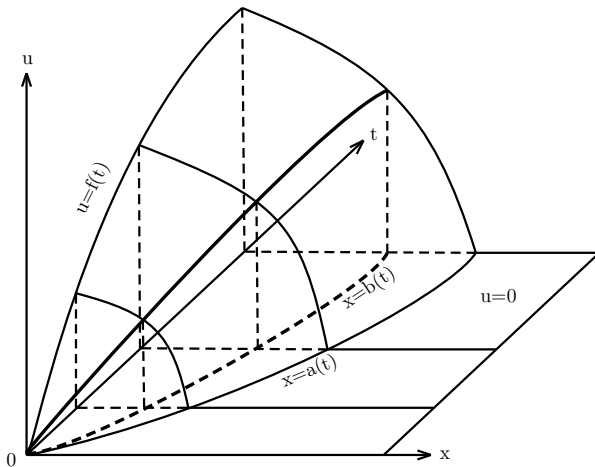


Рис. 1. Одномерная тепловая волна в случае одного уравнения.

Методы решения

Авторы неоднократно исследовали разрешимость краевых задач, предполагающих наличие подобного рода решений, для нелинейных уравнений и систем параболического типа с вырождением. При этом используется целый комплекс методов:

- 1 Метод степенных (характеристических) рядов.
- 2 Метод мажорант.
- 3 Метод редукций к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ).
- 4 Различные численные методы (метод граничных элементов, метод радиальных базисных функций).

Метод рядов

Для построения используется метод рядов, адаптированный в научной школе А.Ф. Сидорова для решения параболических задач с вырождением (характеристические¹⁴ и специальные¹⁵ ряды). С помощью него построены решения с нулевым фронтом в одномерном¹⁶, симметричном¹⁷ и существенно неодномерном случаях¹⁸. Сходимость доказывается методом мажорант с использованием теоремы Коши-Ковалевской.

¹⁴Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1993.

¹⁵Филимонов М.Ю. Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 2003.

¹⁶Казаков А.Л., Лемперт А.А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии. 2012.

¹⁷Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020.

¹⁸Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды ИММ УрО РАН. 2014.

Метод редукции к ОДУ

Точные решения могут быть использованы для верификации численных расчетов, а также оценки радиуса сходимости. Некоторые точные решения с нулевым фронтом представлены в уже упомянутой монографии акад. А.А. Самарского.

При построении точных решений нами используется метод редукции, рассматриваемая задача сводится к задаче Коши для ОДУ (системы ОДУ), наследующей вырождение. При этом решения представляются в форме анзацев различного вида^{19,20}.

¹⁹ Казаков А.Л., Лемперт А.А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии. 2012.

²⁰ Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. 

Численные методы

Полученные рекуррентные формулы коэффициентов рядов, а также точные решения могут быть использованы для верификации численных расчетов.

В некоторых статьях приведены численные расчеты, выполненные методом граничных элементов²¹ и методом радиальных базисных функций²².

²¹ Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021.

²² Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Построение решений вырождающейся системы «реакция-диффузия» в случаях цилиндрической и сферической симметрии при нелинейностях общего вида // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022

Постановка задачи

В докладе исследована разрешимость краевой задачи вида

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + v_x u_x) + f(u, v), \quad (3)$$

$$v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + g(v, u).$$

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \quad (4)$$

Здесь u, v — искомые функции, f, g, a — известные достаточно гладкие функции, причем $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

План исследования

- 1 Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения задачи. При доказательстве строится решение в виде рядов Тейлора, сходимость доказывается методом мажорант с использованием теоремы Коши-Ковалевской.
- 2 Примеры, в которых происходит отступление от условий теоремы (в том числе аналог контрпримера С.В. Ковалевской).
- 3 Построение некоторых точных решений задачи с помощью редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная теорема

Теорема

Пусть

- 1 $a(t)$ и f, g — аналитические функции в точках $t = 0$ и $(0, 0)$ соответственно;
- 2 $a'(0) + \alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2$; $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

Тогда задача (3), (4) имеет единственное нетривиальное аналитическое решение в окрестности кривой $x = a(t)$.

Для удобства введем новую переменную $z = x - a(t)$. Задача (3), (4) примет вид

$$u_t = (\alpha_1 + a')u_z + \beta_1(uv_{zz} + v_z u_z) + f(u, v), \quad (5)$$

$$v_t = (\alpha_2 + a')v_z - \beta_2(vu_{zz} + u_z v_z) + g(v, u),$$
$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (6)$$

Построение решения

Решение построим в виде рядов Тейлора

$$\begin{aligned} u(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad u_n(t) = \left. \frac{\partial^n u}{\partial z^n} \right|_{z=0}; \\ v(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \left. \frac{\partial^n v}{\partial z^n} \right|_{z=0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Определим коэффициенты рядов. Из краевого условия (6) следует тождество $u_0, v_0 \equiv 0$.

Построение решения

Положив в (5) $z = 0$, получим систему

$$(\alpha_1 + a')u_1 + \beta_1 v_1 u_1 = 0, \quad (\alpha_2 + a')v_1 - \beta_2 u_1 v_1 = 0, \quad (8)$$

из которой несложно выразить коэффициенты u_1, v_1 .

Замечание 1

При $\alpha_{1,2} + a' \neq 0$ тождество $u_1 \equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется тождество $v_1 \equiv 0$. Отсюда следует, что система (8) имеет лишь два решения: $u_1, v_1 \equiv 0$ и

$$v_1 = -\frac{\alpha_1 + a'}{\beta_1}, \quad u_1 = \frac{\alpha_2 + a'}{\beta_2}. \quad (9)$$

В дальнейшем будем предполагать выполнение равенств (9), так как случай $u_1, v_1 \equiv 0$ приводит к тривиальному решению задачи.

Построение решения

Чтобы найти u_2, v_2 , необходимо продифференцировать оба уравнения системы (5) по z и положить $z = 0$. Получим равенства

$$\begin{aligned}u_1' &= (\alpha_1 + a')u_2 + \beta_1(u_1v_2 + v_2u_1 + v_1u_2) + f_1, \\v_1' &= (\alpha_2 + a')v_2 - \beta_2(v_1u_2 + u_2v_1 + u_1v_2) + g_1,\end{aligned}\tag{10}$$

в которых использованы обозначения

$$\begin{aligned}f_1 &= [f(u, v)]_z|_{z=0} = f_u(0, 0)u_1 + f_v(0, 0)v_1, \\g_1 &= [g(v, u)]_z|_{z=0} = g_v(0, 0)v_1 + g_u(0, 0)u_1.\end{aligned}$$

Разрешая (10), получим формулы

$$v_2 = \frac{u_1' - f_1}{2\beta_1 u_1} = \frac{a'' - f_1\beta_2}{2\beta_1(\alpha_2 + a')}, \quad u_2 = \frac{v_1' - g_1}{-2\beta_2 v_1} = -\frac{a'' + g_1\beta_1}{2\beta_2(\alpha_1 + a')}.\tag{11}$$

Построение решения

Остальные коэффициенты определяются аналогично, возрастает лишь порядок дифференцирования. Применяя к каждому уравнению системы (5) оператор $\partial^n[.] / \partial z^n|_{z=0}$, получим равенства

$$\begin{aligned} u'_n &= (\alpha_1 + a')u_{n+1} + \beta_1 \left(\sum_{k=0}^n C_n^k u_k v_{n+2-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k v_{k+1} u_{n+1-k} \right) + f_n, \\ v'_n &= (\alpha_2 + a')v_{n+1} - \beta_2 \left(\sum_{k=0}^n C_n^k v_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k u_{k+1} v_{n+1-k} \right) + g_n, \end{aligned} \quad (12)$$

в которых использованы обозначения

$$f_n = \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad g_n = \frac{\partial^n g(v, u)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}.$$

Построение решения

Приводя подобные, выразим из формул (12) коэффициенты v_{n+1} и u_{n+1} :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{\beta_2}{\beta_1(\alpha_2+a')(1+n)} \left[u'_n - \beta_1 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u_k v_{n+2-k} - f_n \right], \\u_{n+1} &= \frac{\beta_1}{\beta_2(\alpha_1+a')(1+n)} \left[v'_n + \beta_2 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) v_k u_{n+2-k} - g_n \right];\end{aligned}\quad n \geq 2.$$

(13)

Решение построено в виде формальных рядов (7) с коэффициентами $u_0, v_0 \equiv 0$, (9), (11), (13), первый этап доказательства завершен.

Доказательство сходимости

Второй этап доказательства разберем кратко. Сходимость рядов докажем методом мажорант.

Перед построением мажорантной задачи сделаем в системе (5) замену

$$u(t, z) = u_1 z + z^2 U(t, z), \quad v(t, z) = v_1 z + z^2 V(t, z), \quad (14)$$

которая представляет собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (7).

Краевое условие (6) выполняется автоматически.

Доказательство сходимости

После приведения подобных и деления на z задачу (5), (6) можно свести к системе

$$\begin{aligned} 4V + 5zV_z + z^2V_{zz} &= \xi_0(t) + z\xi_1(t, U, V, U_t) + \\ &+ z^2\xi_2(t, U, V, U_z, V_z) + z^3\xi_3(t, z, U, V, U_z, V_z, V_{zz}), \\ 4U + 5zU_z + z^2U_{zz} &= \eta_0(t) + z\eta_1(t, V, U, V_t) + \\ &+ z^2\eta_2(t, V, U, V_z, U_z) + z^3\eta_3(t, z, V, U, V_z, U_z, U_{zz}). \end{aligned} \tag{15}$$

В левых частях уравнений (15) собраны слагаемые, относительно которых могут быть выражены коэффициенты наивысшего порядка.

Функции ξ_i , η_i , $i = 0, 1, 2, 3$ аналитические по своим переменным (в начале координат). Отсюда следует, что для них можно подобрать мажоранты.

Доказательство сходимости

При выполнении мажорантных оценок

$$U|_{z=0}, V|_{z=0} \ll W_0(t), \quad U_z|_{z=0}, V_z|_{z=0} \ll W_1(t), \quad \xi_0(t), \eta_0(t) \ll \psi_0(t),$$

$$\xi_1, \eta_1 \ll \psi_1(t, W, W, W_t), \quad \xi_2, \eta_2 \ll \psi_2(t, W, W, W_z, W_z),$$

$$\xi_3, \eta_3 \ll \psi_3(t, z, W, W, W_z, W_z, W_{zz})$$

решение задачи

$$W_{zz} = \frac{\partial \psi_1(t, W, W, W_t)}{\partial z} + \psi_2 + z\psi_3, \quad (16)$$

$$W(t, z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t, z)|_{z=0} = W_1(t) \quad (17)$$

мажорирует решение системы (15).

Доказательство сходимости

В этом можно убедиться, построив решения в виде рядов Тейлора

$$U(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{z^n}{n!}, \quad V(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}, \quad W(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{z^n}{n!},$$

$$U_n = \left. \frac{\partial^n U}{\partial z^n} \right|_{z=0}, \quad V_n = \left. \frac{\partial^n V}{\partial z^n} \right|_{z=0}, \quad W_n = \left. \frac{\partial^n W}{\partial z^n} \right|_{z=0}.$$

Задачу (16), (17) можно привести к виду Ковалевской, продифференцировав уравнение (16) по z , разрешив его относительно W_{zzz} и добавив третье краевое условие $W_{zz}(t, 0) = W_2(t)$.

Доказательство сходимости

Пользуясь обозначением $\psi_3 = \psi_3(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, получим задачу

$$W_{zzz} = \frac{1}{1 - z\psi_{3y_6}} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \psi_3 + z(\psi_{3y_1} + \psi_{3y_2} W_z + \psi_{3y_3} W_z + \right. \\ \left. + \psi_{3y_4} W_{zz} + \psi_{3y_5} W_{zz}) \right], \quad (18)$$

$$W(t, z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t, z)|_{z=0} = W_1(t), \quad W_{zz}(t, z)|_{z=0} = W_2(t). \quad (19)$$

Все входные данные аналитические, следовательно, согласно теореме Коши-Ковалевской, полученная задача имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана.

Пример № 1

Рассмотрим задачу

$$u_t = \beta(uv_{xx} + v_x u_x), \quad (20)$$

$$v_t = -\beta(vu_{xx} + u_x v_x),$$

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x). \quad (21)$$

Здесь (20) — это система (3) при $\beta_{1,2} = \beta$, $\alpha_{1,2} = 0$, $f, g \equiv 0$. Краевые условия (21) выписаны относительно переменной t .

Пример № 1

Построим решение в виде рядов Тейлора

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (22)$$

Коэффициенты $u_0(x)$, $v_0(x)$ известны, остальные определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta(u_0 v_0'' + v_0' u_0'), \quad v_1 = -\beta(v_0 u_0'' + u_0' v_0'), \quad \dots \\ u_{n+1} &= \beta \sum_{k=0}^n C_n^k (u_k v_{n-k}'' + v_k' u_{n-k}'), \quad v_{n+1} = -\beta \sum_{k=0}^n C_n^k (v_k u_{n-k}'' + u_k' v_{n-k}'). \end{aligned} \quad (23)$$

Пример № 1

Имеют ли ряды (22) ненулевой радиус сходимости зависит от начальных данных. Для примера рассмотрим простой, но иллюстративный случай степенных функций

$$u_0(x) = -x^l, \quad v_0(x) = x^l, \quad l \in \mathbb{N} \quad (24)$$

При $l = 1$ ряды (22) превращаются в полиномы первой степени, решение существует для всех $t, x \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$u(t, x) = -x - \beta t, \quad v(t, x) = x + \beta t. \quad (25)$$

Пример № 1

В случае $l = 2$ коэффициенты могут быть записаны в явном виде

$$u_n = -\beta^n 6^n n! x^2, \quad v_n = \beta^n 6^n n! x^2. \quad (26)$$

Такие формулы превращают ряды (22) в геометрические прогрессии, сходящиеся при $x \in \mathbb{R}$ и $t < 1/|6\beta|$ к функциям

$$u(t, x) = -\frac{x^2}{1 - 6\beta t}, \quad v(t, x) = \frac{x^2}{1 - 6\beta t}. \quad (27)$$

Пример № 1

Расходимость же можно наблюдать при $l \geq 3$. В частности, при $l = 3$ ряды (22) запишутся в виде

$$u(t, x) = -x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n b_n}{n!} (xt)^n; \quad v(t, x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n b_n}{n!} (xt)^n. \quad (28)$$

Коэффициенты b_n определяются рекуррентно по формулам

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 15, \quad b_2 = 630, \quad \dots, \quad b_{n+1} = (n+5) \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}. \quad (29)$$

Пример № 1

Пользуясь формулой Даламбера, а также оценкой

$$0 \leq \frac{b_n}{\sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}} \leq \frac{b_n}{C_n^0 (n+3) b_0 b_n} \equiv \frac{1}{n+3},$$

определим радиус R сходимости суммы в формулах (28):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)b_n}{|\beta|(n+5) \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}} = \frac{1}{|\beta|} \cdot 0 = 0.$$

Получили, что $R = 0$ и ряды (28) сходятся лишь при $xt = 0$. Остальные случаи при $l \geq 4$ рассматриваются аналогично.

Пример № 2

Рассмотрим систему (3) при $f, g \equiv 0$:

$$\begin{aligned}u_t &= \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + v_x u_x), \\v_t &= \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x).\end{aligned}\tag{30}$$

Пусть теперь каждая из неизвестных функций имеет свой фронт, заданный линейной функцией

$$u(t, x)|_{x=a_1 t} = v(t, x)|_{x=a_2 t} = 0, \quad a_{1,2} \in \mathbb{R}.\tag{31}$$

Пример № 2

Решение построим в виде плоскостей $u = A_1 t + B_1 x$, $u = A_2 t + B_2 x$, где $A_{1,2}, B_{1,2} \in \mathbb{R}$. Подставляя эти конструкции в (31), получим равенства

$$A_1 + B_1 a_1 = 0, \quad A_2 + B_2 a_2 = 0. \quad (32)$$

Из (30) и (32) следуют формулы

$$u = \frac{a_2 + \alpha_2}{\beta_2}(x - a_1 t), \quad v = \frac{a_1 + \alpha_1}{\beta_1}(x - a_2 t). \quad (33)$$

При $a_2 > a_1$ функции u и v положительны в области

$$t \geq 0, \quad a_1 t < x < a_2 t. \quad (34)$$

Таким образом, задача (30), (31) имеет в области (34) аналитическое решение в виде двух диффузионных волн (33) с разными линейными фронтами.

Точные решения

Приведем некоторые точные решения. Пусть в задаче (5), (6) фронт описывается линейной функцией $a(t) = \gamma t$, $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$u_t = (\alpha_1 + \gamma)u_z + \beta_1(uv_{zz} + v_z u_z) + f(u, v), \quad (35)$$

$$v_t = (\alpha_2 + \gamma)v_z - \beta_2(vu_{zz} + u_z v_z) + g(v, u),$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (36)$$

Если задача (35), (36) удовлетворяет условиям теоремы, то имеет единственное нетривиальное аналитическое решение. Покажем, что это решение не зависит от переменной t , и задача допускает редукцию к задаче Коши для системы двух ОДУ второго порядка.

Точные решения

Исследуем коэффициенты рядов (7) в рассматриваемом случае. В силу линейности фронта первые коэффициенты постоянны и для них справедливы формулы

$$u_0, v_0 \equiv 0; \quad v_1 = -\frac{\alpha_1 + \gamma}{\beta_1}, \quad u_1 = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2};$$

$$v_2 = -\frac{f_1 \beta_2}{2\beta_1(\alpha_2 + \gamma)}, \quad u_2 = -\frac{g_1 \beta_1}{2\beta_2(\alpha_1 + \gamma)}.$$

Точные решения

Пользуясь формулой (13), индукцией по n можно доказать, что все остальные коэффициенты также являются константами

$$v_{n+1} = \frac{-\beta_2}{\beta_1(\alpha_2+\gamma)(1+n)} \left[\beta_1 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u_k v_{n+2-k} + f_n \right],$$

$$u_{n+1} = \frac{\beta_1}{\beta_2(\alpha_1+\gamma)(1+n)} \left[\beta_2 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) v_k u_{n+2-k} - g_n \right]; \quad n \geq 2.$$

Таким образом, установлена справедливость нижеследующего утверждения.

Точные решения

Утверждение

Задача (5), (6) при $a(t) = \gamma t$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha_{1,2} + \gamma \neq 0$, $f(0,0) = g(0,0)$ может быть сведена к задаче Коши для системы ОДУ

$$\beta_1(uv'' + v'u') + (\alpha_1 + \gamma)u' + f(u, v) = 0, \quad (37)$$

$$-\beta_2(vu'' + u'v') + (\alpha_2 + \gamma)v' + g(v, u) = 0,$$

$$u(0) = v(0) = 0, \quad v'(0) = -\frac{\alpha_1 + \gamma}{\beta_1}, \quad u'(0) = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2}, \quad (38)$$

имеющей единственное нетривиальное аналитическое решение.

Точные решения

Для корректной постановки задачи Коши помимо преобразованного условия (6) добавлено значение первых производных (коэффициенты $u_1 = (\alpha_2 + \gamma)/\beta_2$ и $v_1 = -(\alpha_1 + \gamma)/\beta_1$).

Существование нетривиального аналитического решения $v(z)$, $u(z)$ задачи (37), (38) следует из доказанной теоремы.

Замечание 2

При выборе $f, g \equiv 0$ для всех $n \geq 2$ имеет место равенство $v_n, u_n = 0$. При этом решение, также как и фронт, линейно:

$$v(z) = -\frac{\alpha_1 + \gamma}{\beta_1} z, \quad u(z) = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2} z. \quad (39)$$

Численные расчеты

Численные расчеты проведены для обобщения задачи (3), (4) вида

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1 uv_{xx} + \gamma_1 v_x u_x + Av^{\gamma-\xi} u^\xi, \quad \gamma_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

$$v_t = \alpha_2 v_x + \beta_2 vu_{xx} + \gamma_2 u_x v_x + Bu^{\gamma-\eta} v^\eta, \quad (41)$$
$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0.$$

Здесь

$$\alpha_{1,2} = 0; \beta_{1,2}, \gamma_{1,2} \neq 0; f(u, v) = Av^{\gamma-\xi} u^\xi, \quad g(v, u) = Bu^{\gamma-\eta} v^\eta,$$

$$A, B, \gamma, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0, \quad 0 \leq \xi \leq \gamma, \quad 0 \leq \eta \leq \gamma.$$

Численные расчеты

Задача (40), (41) рассматривается на заданном конечном промежутке времени. Этот промежуток разбивается на достаточно малые шаги длиной h . На шаге $t_k = kh$ систему (40) представим в виде

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{v_t - \beta_1 v_x - \beta_3 u_x v_x - g(v, u)}{\beta_2 v}, \\ v_{xx} &= \frac{u_t - \alpha_1 u_x - \alpha_3 u_x v_x - f(u, v)}{\alpha_2 u}. \end{aligned} \quad (42)$$

Система (42) рассмотрена на отрезке $x \in [0, a(t_k)]$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u|_{x=a(t_k)} &= 0, \quad u_x|_{x=a(t_k)} = -\frac{\alpha_1 + a'(t_k)}{\alpha_3}, \\ v|_{x=a(t_k)} &= 0, \quad v_x|_{x=a(t_k)} = -\frac{\beta_1 + a'(t_k)}{\beta_3}. \end{aligned} \quad (43)$$

Численные расчеты

Задача (40), (41) была решена при значениях параметров

$\gamma = 1, \eta = 0.5, \xi = 0.5, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.5, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1,$
 $a(t) = \lambda \exp(\mu t), \lambda = 1, \mu = 0.5, A = 1, B = 1, m = 51, h = 0.1, 0.05, 0.02,$
соответствующих найденному точному решению:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \lambda^2 \exp(2\mu t) r \left(1 - \frac{x}{\lambda \exp(\mu t)} \right), \\ v(t, x) &= \lambda^2 \exp(2\mu t) s \left(1 - \frac{x}{\lambda \exp(\mu t)} \right). \end{aligned} \tag{44}$$

Функции r и s определяются из системы

$$\begin{aligned}\alpha_2 r(y) s''(y) + \alpha_3 r'(y) s'(y) + \mu(y-1) r'(y) + \\ + A s^{1-\xi}(y) r^\xi(y) - 2\mu r(y) = 0, \\ \beta_2 s(y) r''(y) + \beta_3 s'(y) r'(y) + \mu(y-1) s'(y) + \\ + B r^{1-\eta}(y) s^\eta(y) - 2\mu s(y) = 0.\end{aligned}\tag{45}$$

Сравнение полученных решений при различных шагах по времени с решением (44) показано на рисунке. Иллюстрация показывает достаточную точность пошагового алгоритма решения задачи (40), (41), а также его сходимость к точному решению с уменьшением шага по времени.

Численные расчеты

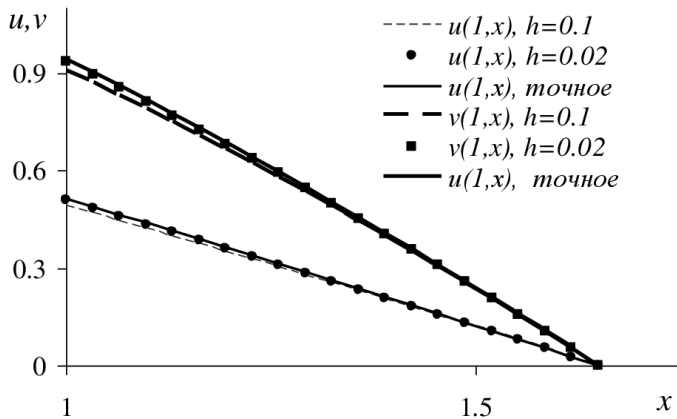


Рис. 2. Сравнение численных решений задачи (3), (4) с точным решением.

Заключение

Настоящая работа продолжает цикл исследований авторов аналитической разрешимости задач о построении решений с нулевым фронтом для эволюционных уравнений и систем параболического типа с вырождением.

Доказательство теоремы существования и единственности носит конструктивный характер, построенное в виде рядов решение может быть использовано для верификации численных расчетов.

Разобраны два примера: в первом показана возможность существования решений исходной системы с двумя различными нулевыми фронтами, второй — аналог известного контрпримера С.В. Ковалевской в рассмотренном случае. Также представлены некоторые точные решения.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!