О критическом показателе «мгновенное разрушение / локальная разрешимость» в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа

А. А. Панин, М. О. Корпусов, И. К. Каташева

Московский государственный университет
физический факультет

8 ноября 2022 г.

§ 1
Постановка задачи
и определение слабого решения

Рассматривается задача Коши, описывающая полупроводник во внешнем постоянном магнитном поле.

Классическая постановка:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u] \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_3 \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_1 \Delta_2 u + \sigma_3 u_{x_3 x_3} = |\nabla u|^q, \quad q > 1, \quad \sigma_1,\ \sigma_3 > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

Степенная нелинейность описывает плотность источников свободных зарядов, анизотропия вызвана анизотропией тензора электропроводности при наличии внешнего магнитного поля.

Пусть $u_0(x) \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 1. Локальным слабым решением задачи (1)—(2) мы называем функцию $u(x,t) \in L^q(0,T; W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big[\big(\nabla u(x,t), \nabla \varphi'(x,t)\big) - \sigma_1 u_{x_1}(x,t)\varphi_{x_1}(x,t) - \\ - \sigma_1 u_{x_2}(x,t)\varphi_{x_2}(x,t) - \sigma_3 u_{x_3}(x,t)\varphi_{x_3}(x,t) \Big]\, dx\, dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_0(x), \nabla \varphi(x,0))\, dx = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,t)|^q \varphi(x,t)\, dx\, dt \qquad (3)$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{\infty,1}_{x,t}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ такой, что

$\varphi(x,T) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3$, $\quad \mathrm{supp}_x \varphi(x,t) \subset O(0,R)$ при $t \in [0,T]$, $\quad R = R[\varphi] > 0$.

§ 2
Мгновенное разрушение

Дадим определение класса U начальных функций $u_0(x)$, для которого мы будем доказывать мгновенное разрушение локального слабого решения задачи Коши в смысле определения 1.

Определение 2. Функция $u_0(x) \in U$, если $u_0(x) \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ и найдутся такие $x_0 \in \mathbb{R}^3$ и $R_0 > 0$, что $u_0(x) \in H^2(O(x_0, R_0))$ и

$$\mu \{x \in O(x_0, R_0) : \; \Delta_3 u_0(x) \neq 0\} > 0,$$

где μ — это стандартная мера Лебега в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 1. Если $u_0(x) \in U$ и $q \in (1, 3/2]$, то не существует локального слабого решения задачи Коши ни для какого $T > 0$, т. е. имеет место мгновенное разрушение локального слабого решения задачи Коши.

Мгновенное разрушение решения: идея доказательства

Положим
$$\varphi(x,t) = \varphi_T(t)\varphi_R(x),$$
где
$$\varphi_T(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda}, \quad \lambda > q', \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$
и
$$\varphi_R(x) = \varphi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \varphi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s \in [0, 1/2]; \\ 0, & \text{если} \quad s \geqslant 1, \end{cases} \quad \varphi_0(s) \in \mathbb{C}^{\infty}[0, +\infty),$$
причём φ_0 является невозрастающей.

Оценим, например,

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u,\nabla\varphi'\right)\,dx\,dt\right|\leqslant\frac{\lambda}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}|\nabla u(x,t)||\nabla\varphi_R(x)|\,dx\,dt=$$

$$=\frac{\lambda}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q}|\nabla u(x,t)|\varphi_R^{1/q}(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'-1}\frac{|\nabla\varphi_R(x)|}{\varphi_R^{1/q}(x)}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\lambda}{T}I_R^{1/q}c_1(R,T),\qquad(4)$$

где

$$I_R:=\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi_T(t)\varphi_R(x)|\nabla u|^q\,dx\,dt\qquad(5)$$

(правая часть тождества (3) при выбранной пробной функции),

$$c_1(R,T):=\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-q'}\frac{|\nabla\varphi_R(x)|^{q'}}{\varphi_R^{q'/q}(x)}\,dx\,dt\right)^{1/q'}=$$

$$=\left(\frac{T}{\lambda-q'+1}\right)^{1/q'}c_2R^{\frac{3-q'}{q'}},\quad c_2>0.\qquad(6)$$

Аналогично оцениваются остальные члены тождества (3), определяющего слабое решение. В результате

$$I_R \leqslant \frac{\lambda}{T} c_2(T) R^{\frac{3-q'}{q'}} I_R^{1/q} + c_3(T) R^{\frac{3-q'}{q'}} I_R^{1/q} + |||\nabla u_0|||_{L^q(\mathbb{R}^3)} c_4 R^{\frac{3-q'}{q'}} \equiv$$

$$\equiv c(T) R^{\frac{3-q'}{q'}} I_R^{1/q} + \tilde{c}_4 R^{\frac{3-q'}{q'}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^q I_R + \frac{1}{\varepsilon^{q'}} \frac{c(T)^{q'}}{q'} R^{3-q'} + \tilde{c}_4 R^{\frac{3-q'}{q'}}, \quad (7)$$

откуда при $R \to +\infty$

$$(1-\varepsilon^q) I_R \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{q'}} \frac{c(T)^{q'}}{q'} R^{3-q'} + \tilde{c}_4 R^{\frac{3-q'}{q'}} \to 0 \quad \text{при } q' > 3 \Leftrightarrow q < \frac{3}{2}. \quad (8)$$

При этом левая часть (по т. Беппо Леви) стремится к

$$(1-\varepsilon^q) \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \, |\nabla u|^q \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda}. \quad (9)$$

Значит,

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \, |\nabla u(x,t)|^q \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda} = 0. \quad (10)$$

Следовательно, $u(x,t)$ не зависит от x: $u(x,t) = F(t)$.
После подстановки полученного равенства $u(x,t) = F(t)$ в тождество (3) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_0(x), \nabla \varphi(x,0))\, dx = 0 \tag{11}$$

для всех функций $\varphi(x,t)$, удовлетворяющих условиям определения 1.
Поэтому для произвольных функций $\varphi(x,t)$ вида

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(x)\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad \varphi_1(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{supp}\varphi_1(x) \subset O(x_0, R_0) \tag{12}$$

в классе $u_0(x) \in U$ после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{O(x_0,R_0)} \Delta u_0(x)\varphi_1(x)\, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi_1(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(x_0, R_0)). \tag{13}$$

В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к выводу

$$\Delta u_0(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R_0),$$

что противоречит определению класса $U \ni u_0(x)$.

§ 3
Интегральное уравнение при $q > \frac{3}{2}$

С помощью формул Грина получено интегральное уравнение

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \mathscr{E}(x-y,t)\Delta_3 u_0(y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|\nabla u(y,\tau)|^q, \quad (14)$$

в котором функция

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi|x|} \exp\left(-\frac{\sigma_1+\beta(x)}{2}t\right) I_0\left(\frac{\sigma_1-\beta(x)}{2}t\right) \quad (15)$$

с

$$\beta(x) = \frac{\sigma_3(x_1^2+x_2^2)+\sigma_1 x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \qquad \sigma_1, \sigma_3 > 0,$$

является фундаментальным решением оператора

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) := \Delta_{3x}\frac{\partial w}{\partial t} + \sigma_1 \Delta_{2x} w(x,t) + \sigma_2 w_{x_3 x_3}. \quad (16)$$

(Фундаментальное решение
было построено с помощью преобразования Лапласа.)

Лемма 1. Фундаментальное решение $\mathscr{E}(x,t)$ обладает следующими свойствами.

1. При $x \neq 0$
$$\mathscr{E}(x,0) = -\frac{1}{4\pi|x|}, \tag{17}$$
2. $\mathscr{E}(x,t) \in \mathbb{C}^\infty\bigl(\bigl(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\bigr) \times [0,+\infty)\bigr)$,
3. При $x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, $t \in [0,T]$, $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы оценки
$$\left|\frac{\partial^k \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k}\right| \leqslant \frac{A_1(T)}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial^{k+1} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k \partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_2(T)}{|x|^2}, \quad j = 1,2,3, \tag{18}$$
$$\left|\frac{\partial^{k+2} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k \partial x_j \partial x_l}\right| \leqslant \frac{A_3(T)}{|x|^3}, \quad j,\, l = 1,2,3, \tag{19}$$
где $0 < A_n(T) < +\infty$ при $n = 1,2,3$ — постоянные.

Доказательство основано на явном виде (15) функции $\mathscr{E}(x,t)$ и свойствах функции Инфельда $I_0(x)$.

Преобразованное интегральное уравнение

Удобно вместо $u(x,t)$ в интегральном уравнении (14) перейти к функции

$$v(x,t) = (1+|x|^2)^{1/2} u(x,t) \tag{20}$$

и получить следующее интегральное уравнение:

$$v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_\alpha(x,y,t)\left(1+|y|^2\right)^\alpha \Delta_3 u_0(y)\,dy +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, G_q(x,y,t-\tau)\left|\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\nabla v - \frac{y}{(1+|y|^2)^{1/2}} v\right|^q, \tag{21}$$

где

$$G_\gamma(x,y,t) := \frac{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}{(1+|y|^2)^\gamma}\mathscr{E}(x-y,t), \quad \gamma > 0. \tag{22}$$

Теорему о непродолжаемом решении интегрального уравнения (21) мы доказываем в банаховом пространстве $\mathbb{C}([0,T];W_1)$ с нормой $\|\cdot\|_{1,T}$:

$$\|v\|_{1,T} := \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^3} |v(x,t)| + \sum_{j=1}^3 \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^{1/2}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j}\right|. \tag{23}$$

Теорема 2. Пусть $q > 3/2$. Для любой функции $u_0(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющей условию

$$|\Delta_3 u_0(x)| \leqslant \frac{A_4}{(1+|x|^2)^\alpha}, \quad \alpha > 3/2, \tag{24}$$

найдётся такое $T_0 = T_0[u_0] > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (21) класса

$$v(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; W_1) \tag{25}$$

причём при $T_0 < +\infty$ имеет место предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|v\|_{1,T} = +\infty. \tag{26}$$

Лемма 2. Пусть $\gamma > 3/2$, тогда при $t \in [0, T]$ справедливы оценки

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^k G_\gamma(x,y,t)}{\partial t^k} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant A_1(T) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}{(1+|y|^2)^\gamma\,|x-y|}\,dy \leqslant B_1(T) < +\infty, \quad (27)$$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)} (1+|x|^2)^{1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^{k+1} G_\gamma(x,y,t)}{\partial x_j \partial t^k} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant A_1(T) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}{(1+|y|^2)^\gamma\,|x-y|}\,dy +$$

$$+A_2(T) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1+|x|^2}{(1+|y|^2)^\gamma\,|x-y|^2}\,dy \leqslant B_2(T) < +\infty, \quad j=1,2,3, \quad (28)$$

при $k = 0, 1, 2$, где $A_1(T)$ и $A_2(T)$ фигурировали выше в оценках фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$.

Существенно, что при доказательстве леммы возникают, например, оценки интегралов вида

$$I_1 = \frac{2\pi}{\gamma - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr}{[1 + (r - |x|)^2]^{\gamma-1}} = \frac{2\pi}{\gamma - 1} \int\limits_{-|x|}^{+\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^{\gamma-1}} < +\infty, \qquad (29)$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{\gamma - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr}{[1 + (r + |x|)^2]^{\gamma-1}} \leqslant \frac{2\pi}{\gamma - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr}{(1 + r^2)^{\gamma-1}} < +\infty, \qquad (30)$$

$$|I_1| \leqslant \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_0^{\varepsilon|x|} \frac{r}{(1 + r^2)^{\gamma}} \left| \ln\left(1 - \frac{r}{|x|}\right) - \ln\left(1 + \frac{r}{|x|}\right) \right| dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi c_1(\varepsilon)}{|x|^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{r^2}{(1 + r^2)^{\gamma}}\, dr \leqslant \frac{A_5(\varepsilon)}{|x|^2}, \qquad (31)$$

из которых понятно происхождение условия $q > 3/2$. Напомним, что при $q \leqslant 3/2$ была показана некорректность задачи в широком классе начальных данных.

Теперь введём потенциалы

$$U_0(x,t) \equiv U_0[\rho_0](x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, G_\gamma(x,y,t)\rho_0(y), \tag{32}$$

$$U_1(x,t) \equiv U_1[\rho](x,t) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, G_\gamma(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau). \tag{33}$$

Лемма 3. Для любых $\rho_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ и $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ имеем при $\gamma > 3/2$:

$$U_0(x,t), U_1(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];W_1), \tag{34}$$

где W_1 есть банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{W_1} := \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |v(x)| + \sum_{j=1}^{3} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^{1/2} \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\right|. \tag{35}$$

Шаг 1. $U_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. В силу оценки (27) из леммы 2 имеем

$$|U_0(x,t_2) - U_0(x,t_1)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\rho_0(y)|\, |G_\gamma(x,y,t_2) - G_\gamma(x,y,t_1)|\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\rho_0(y)| \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} G_\gamma(x,y,s)\, ds \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^3} |\rho_0(y)| |t_2 - t_1| \sup_{x\in\mathbb{R}^3, s\in[t_1,t_2]} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial G_\gamma(x,y,s)}{\partial s} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant B_1(T) \sup_{y\in\mathbb{R}^3} |\rho_0(y)| |t_2 - t_1|. \qquad (36)$$

Таким образом, для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ выполнена оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |U_0(x,t_2) - U_0(x,t_1)| \leqslant B_1(T) \sup_{y\in\mathbb{R}^3} |\rho_0(y)| |t_2 - t_1|. \qquad (37)$$

Кроме того, в силу оценки (27) справедливо следующее выражение:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} |U_0(x,t)| \leqslant B_1(T) \sup_{y\in\mathbb{R}^3} |\rho_0(y)|. \qquad (38)$$

Следовательно, $U_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$.

Доказательство леммы 3 (2)

Теперь докажем, что $U_1(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. При $t_1, t_2 \in [0,T]$ имеем

$$|U_1(x,t_2) - U_1(x,t_1)| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_\gamma(x,y,t_2-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau - \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_\gamma(x,y,t_1-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |G_\gamma(x,y,t_2-\tau)|\,|\rho(y,\tau)|\,dy\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |G_\gamma(x,y,t_2-\tau) - G_\gamma(x,y,t_1-\tau)|\,|\rho(y,\tau)|\,dy\,d\tau =: I_{11} + I_{12}. \quad (39)$$

Доказательство леммы 3 (3)

Для интеграла I_{12} в силу оценки (27) справедлива следующая оценка, аналогичная оценке (36)

$$I_{12} \leqslant \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{t_1-\tau}^{t_2-\tau} \left| \frac{\partial G_\gamma(x,y,s)}{\partial s} \right| ds |\rho(y,\tau)| \, dy \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant B_1(T) T |t_2 - t_1| \sup_{\tau \in [0,T], y \in \mathbb{R}^3} |\rho(y,\tau)|, \quad (40)$$

а для I_{11} в силу оценки (27) справедливо следующее неравенство:

$$I_{11} \leqslant B_1(T) |t_2 - t_1| \sup_{\tau \in [0,T], y \in \mathbb{R}^3} |\rho(y,\tau)|. \quad (41)$$

Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$|U_1(x,t)| \leqslant T B_1(T) \sup_{\tau \in [0,T], y \in \mathbb{R}^3} |\rho(y,\tau)|. \quad (42)$$

Из оценок (39)—(42) вытекает, что $U_1(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$.

Доказательство леммы 3 (4)

Шаг 2. Докажем теперь, что $U_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];W_1)$.

$$U_0(x,t) = U_{01}(x,t) + U_{02}(x,t), \tag{43}$$

$$U_{01}(x,t) = \int_{O(x_{00},R)} G_\gamma(x,y,t)\rho_0(y)\,dy =$$
$$= (1+|x|^2)^{1/2} \int_{O(x_{00},R)} \mathscr{E}(x-y,t)\frac{\rho_0(y)}{(1+|y|^2)^\gamma}\,dy, \tag{44}$$

в U_{02} интегрирование идёт по $\mathbb{R}^3 \backslash O(x_{00},R)$ вместо $O(x_{00},R)$. В силу оценок $\mathscr{E}$ и её производных при $x \neq y$ и $t \in [0,T]$ имеем

$$|\mathscr{E}(x-y,t)| \leqslant \frac{A_1(T)}{|x-y|}, \quad \left|\frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_2(T)}{|x-y|^2}. \tag{45}$$

Мы хотим показать, что $U_{01}(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ и

$$\frac{\partial U_{01}(x,t)}{\partial x_j} = \int_{O(x_{00},R)} \frac{\partial G_\gamma(x,y,t)}{\partial x_j}\rho_0(y)\,dy. \tag{46}$$

У Гилбарга, Трудингера результат о первых производных ньютоновского потенциала получен не на основании явного вида фундаментального решения оператора Лапласа, а на основе оценок вида (45) для $-1/(4\pi|x-y|)$. Распространим это на наш случай.

Обозначив $\tilde{\rho}_0(y) := \rho_0(y)/(1+|y|^2)^\gamma$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}U_{01}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_j}(1+|x|^2)^{1/2}\cdot\int_{O(x_{00},R)}\mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy + \\ + (1+|x|^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{O(x_{00},R)}\mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy, \quad (47)$$

поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{O(x_{00},R)}\mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy = \int_{O(x_{00},R)}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy. \quad (48)$$

Обозначим правую часть формулы (48) через $V(x)$ и введём срезающую функцию

$$\eta\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R}),\quad 0\leqslant\eta\leqslant 1,\quad 0\leqslant\eta'\leqslant 2,\quad \eta\equiv 0 \text{ на } [0;1],\quad \eta\equiv 1 \text{ на } [2;+\infty). \quad (49)$$

Также введём $W(x)$:

$$W(x) := \int_{O(x_{00},R)}\mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy. \quad (50)$$

Теперь введём срезку функции $W(x)$:

$$W_\varepsilon(x) := \int_{O(x_{00},R)} \mathscr{E}(x-y,t)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\tilde{\rho}_0(y)\,dy. \tag{51}$$

Поскольку

$$W(x) - W_\varepsilon(x) = \int_{O(x,2\varepsilon)\cap O(x_{00},R)} \mathscr{E}(x-y,t)\left(1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)\tilde{\rho}_0(y)\,dy, \tag{52}$$

имеем $W_\varepsilon \rightrightarrows W$ при $\varepsilon \to 0$. Далее, рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W_\varepsilon(x) := \int_{O(x_{00},R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{E}(x-y,t)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)\tilde{\rho}_0(y)\,dy. \tag{53}$$

Для $\frac{\partial}{\partial x_j} W(x) = V(x)$ достаточно: $W_\varepsilon \rightrightarrows W$, $\frac{\partial}{\partial x_j} W_\varepsilon \rightrightarrows V$. Напомним:

$$W(x) = \int_{O(x_{00},R)} \mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy, \tag{54}$$

$$V(x) = \int_{O(x_{00},R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\mathscr{E}(x-y,t)\tilde{\rho}_0(y)\,dy. \tag{55}$$

Итак, осталось оценить

$$\left|V(x)-\frac{\partial}{\partial x_j}W_\varepsilon\right| = \left|\int_{O(x_{00},R)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right]\mathscr{E}(x-y,t)\right)\tilde{\rho}_0(y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\int_{O(x,2\varepsilon)\cap O(x_{00},R)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right]\mathscr{E}(x-y,t)\right)\tilde{\rho}_0(y)\,dy\right|. \quad (56)$$

Заметим:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left([1-\eta_\varepsilon]\mathscr{E}(x-y,t)\right)\right| \leqslant \left|\mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial}{\partial x_j}(1-\eta_\varepsilon)\right| + (1-\eta_\varepsilon)\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\mathscr{E}(x-y,t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\varepsilon}|\mathscr{E}(x-y,t)| + \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\mathscr{E}(x-y,t)\right| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\frac{A_1(T)}{|x-y|} + \frac{A_2(T)}{|x-y|^2}. \quad (57)$$

При интегрировании получаем

$$\left|V(x)-\frac{\partial}{\partial x_j}W_\varepsilon\right| \leqslant \int_{O(x,2\varepsilon)\cap O(x_{00},R)}\left(\frac{2}{\varepsilon}\frac{A_1(T)}{|x-y|} + \frac{A_2(T)}{|x-y|^2}\right)dy \cdot \sup_{O(x,2\varepsilon)}|\tilde{\rho}_0| \leqslant$$

$$\leqslant \left(A_1(T)\cdot 16\pi\varepsilon + A_2(T)\cdot 8\pi\varepsilon\right)\sup_{O(x,2\varepsilon)}|\tilde{\rho}_0| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \quad (58)$$

В результате предыдущих рассуждений мы установили, что $U_{01}(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ и

$$\frac{\partial U_{01}(x,t)}{\partial x_j} = \int_{O(x_{00},R)} \frac{\partial G_\gamma(x,y,t)}{\partial x_j} \rho_0(y)\, dy. \tag{59}$$

Поскольку у подынтегральной функции в выражении $U_{02}(x,t)$

$$U_{02}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_{00},R)} G_\gamma(x,y,t)\rho_0(y)\, dy =$$
$$= (1+|x|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_{00},R)} \mathscr{E}(x-y,t) \frac{\rho_0(y)}{(1+|y|^2)^\gamma}\, dy. \tag{60}$$

нет особенности и поскольку $q > 3/2$, мы также приходим к выводу о том, что для каждого $t \in [0,T]$ функция $U_{02}(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ и справедливо равенство

$$\frac{\partial U_{02}(x,t)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x_{00},R)} \frac{\partial G_\gamma(x,y,t)}{\partial x_j} \rho_0(y)\, dy. \tag{61}$$

Итак, из равенств (59) и (61) вытекает, что для каждого $t \in [0,T]$ верно $U_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ и

$$\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_\gamma(x,y,t)}{\partial x_j} \rho_0(y)\, dy. \tag{62}$$

В силу оценки (28) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$(1+|x|^2)^{1/2}\left|\frac{\partial U_0(x,t_2)}{\partial x_j}-\frac{\partial U_0(x,t_1)}{\partial x_j}\right|\leqslant$$

$$\leqslant (1+|x|^2)^{1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial G_\gamma(x,y,t_2)}{\partial x_j}-\frac{\partial G_\gamma(x,y,t_1)}{\partial x_j}\right||\rho_0(y)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant (1+|x|^2)^{1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial^2 G_\gamma(x,y,s)}{\partial s\partial x_j}\right|ds|\rho_0(y)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant |t_2-t_1|\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\rho_0(y)|\sup_{s\in[0,T],x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^{1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial^2 G_\gamma(x,y,s)}{\partial s\partial x_j}\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant B_2(T)|t_2-t_1|\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\rho_0(y)|. \quad (63)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$(1+|x|^2)^{1/2}\left|\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial x_j}\right|\leqslant B_2(T)\sup_{y\in\mathbb{R}^3}|\rho_0(y)|. \quad (64)$$

В итоге получаем, что $U_0(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];W_1)$.
Доказательство $U_1(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];W_1)$ опустим.

Напомним интегральное уравнение (21):

$$v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_\alpha(x,y,t)\left(1+|y|^2\right)^\alpha \Delta_3 u_0(y)\,dy +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\, G_q(x,y,t-\tau)\left|\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\nabla v - \frac{y}{(1+|y|^2)^{1/2}}v\right|^q, \quad (65)$$

которое мы рассматриваем в банаховом пространстве $\mathbb{C}([0,T];W_1)$ с нормой $\|\cdot\|_{1,T}$:

$$\|v\|_{1,T} := \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^3}|v(x,t)| + \sum_{j=1}^3 \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^{1/2}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j}\right|. \quad (66)$$

Для доказательства существования решения интегрального уравнения (65) выберем замкнутое ограниченное подмножество $D_{R,T}$ банахова пространства $\mathbb{C}([0,T];W_1)$ следующего вида:

$$D_{R,T} := \{v(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];W_1) : \ \|v\|_{1,T} \leqslant R\}. \tag{67}$$

Перепишем интегральное уравнение (21) в следующем виде:

$$v(x,t) = H[v](x,t), \tag{68}$$

где

$$H[v](x,t) = h_\alpha(x,t) + H_1[v](x,t), \tag{69}$$

$$h_\alpha(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_\alpha(x,y,t)\left(1+|y|^2\right)^\alpha \Delta_3 u_0(y)\,dy, \tag{70}$$

$$H_1[v](x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_q(x,y,t-\tau)\left|\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\nabla v(y,\tau) - \frac{y}{\left(1+|y|^2\right)^{1/2}} v\right|^q dy\,d\tau. \tag{71}$$

Лемма 4. Пусть $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ и выполнена оценка (24). Тогда оператор $H(\cdot)$ при $q > 3/2$ действует

$$H(\cdot):\ \mathbb{C}([0,T];W_1) \to \mathbb{C}([0,T];W_1). \tag{72}$$

(Используем, что при $w \in \mathbb{C}([0,T];W_1)$ верно $|.|^q \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, и лемму 3.)

Лемма 5. Для произвольного $R > 0$ при $q > 3/2$ найдётся такое малое $T > 0$, что

$$H_1(v) : D_{R,T} \to D_{R/2,T}. \tag{73}$$

Лемма 6. Пусть $q > 3/2$. Тогда для любого $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющего неравенству (24), найдётся достаточно большое $R > 0$ и достаточно малое $T > 0$ такие, что

$$H(\cdot):\ D_{R,T} \to D_{R,T}, \tag{74}$$

где замкнутый шар $D_{R,T} \subset \mathbb{C}([0,T];W_1)$ определен равенством (67).

Лемма 7. При выполнении условия ($B_1(T)$ и $B_2(T)$ см. в лемме 2)

$$qT(B_1(T) + 3B_2(T))R^{q-1} \leqslant \frac{1}{2} \tag{75}$$

оператор $H(v)(x,t)$ сжимающий на шаре $D_{R,T}$.

Далее — стандартное продолжение по времени, что и доказывает теорему 2.

Вернёмся к $u(x,t)$. Напомним, $v(x,t) = (1+|x|^2)^{1/2}u(x,t)$, и введём

$$\|u\|_{2,T} := \sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} (1+|x|^2)^{1/2}|u(x,t)| + \\ + \sum_{j=1}^{3} \sup_{x\in\mathbb{R}^3, t\in[0,T]} (1+|x|^2) \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right|. \quad (76)$$

Лемма 8. Справедливо двустороннее неравенство

$$\frac{1}{2}\|v\|_{1,T} \leqslant \|u\|_{2,T} \leqslant 4\|v\|_{1,T}. \quad (77)$$

Теорема 3. Для каждой $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющей условию (24), найдётся такое максимальное $T_0 = T_0(u_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (14) класса

$$u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; W_2),$$

причём при $T_0 < +\infty$ имеем

$$\lim_{T\uparrow T_0} \|u\|_{2,T} = +\infty. \quad (78)$$

§ 4
Разрешимость задачи Коши в слабом смысле (3) при $q > 3/2$

Теорема 4. При $q > 3/2$ для любой функции $u_0(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющей условиям

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{D_1}{(1+|x|^2)^{1/2}}, \quad |\nabla u_0(x)| \leqslant \frac{D_2}{1+|x|^2}, \tag{79}$$

$$|\Delta_3 u_0(x)| \leqslant \frac{D_3}{(1+|x|^2)^{\alpha}}, \quad \alpha > 3/2, \tag{80}$$

существует локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 1.

Основные этапы доказательства:

1) исследование свойств потенциалов, входящих в интегральное уравнение;
2) «подстановка» их в определение слабого решения.

Лемма 9. Пусть $\rho_0(x) \in \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$ при $\alpha > 3/2$. Тогда классический объёмный ньютоновский потенциал

$$W_0(x) := W_0[\rho_0](x) := -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \rho_0(y)\, dy \tag{81}$$

удовлетворяет равенству

$$\Delta_x W_0(x) = \rho_0(x) \quad \text{в смысле} \quad \mathscr{D}(\mathbb{R}^3). \tag{82}$$

Лемма 10. Пусть $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3))$ при $\alpha > 3/2$. Тогда

$$V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; W_2) \tag{83}$$

и при всех $t \in [0,T]$ для потенциала
$V(x,t) := \int_0^t \int \mathscr{E}(x-y, t-\tau)\rho(y,\tau)\, dy\, d\tau$
верно

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V](x,t) = \rho(x,t) \quad \text{в смысле} \quad \mathscr{D}(\mathbb{R}^3). \tag{84}$$

Лемма 11. Для любой плотности $\rho_0(x) \in \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^\alpha; \mathbb{R}^3)$ при $\alpha > 3/2$ неклассический объёмный потенциал $V_0(x,t) := \int \mathscr{E}(x-y,t)\rho_0(y)\, dy$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,T]; W_2)$ для любого $T > 0$ и справедливо равенство

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V_0](x,t) = \rho(x,t) \quad \text{в смысле} \quad \mathscr{D}(\mathbb{R}^3). \tag{85}$$

Лемма 12. Пусть $u_0(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3)$ и при некотором $\alpha > 3/2$

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{A_1}{(1+|x|^2)^{1/2}}, \ |\nabla u_0(x)| \leqslant \frac{A_2}{1+|x|^2}, \ |\Delta_3 u_0(x)| \leqslant \frac{A_3}{(1+|x|^2)^{\alpha}}. \quad (86)$$

Тогда

$$-\int \frac{1}{4\pi|x-y|} \Delta_3 u_0(y)\, dy = u_0(x). \quad (87)$$

Отсюда сразу следует

Лемма 13. Для любой функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условиям леммы 12, и для каждой точки $x \in \mathbb{R}^3$ справедливо равенство

$$V_0[\Delta_3 u_0](x,0) = u_0(x). \quad (88)$$

Поэтому верна

Лемма 14. Для любой $u_0(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющей неравенствам (79), (80), решение интегрального уравнения (14) принадлежит классу

$$\mathbb{C}^1([0,T]; W_2) \quad \text{для всех} \quad T \in (0,T_0). \quad (89)$$

Связь построенного решения с локальным слабым решением задачи Коши

В силу теоремы 3 $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];W_2)$ для любого $T \in (0,T_0)$, а поэтому

$$\rho(x,t) := |\nabla u|^q \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b((1+|x|^2)^q;\mathbb{R}^3)), \quad q > 3/2. \qquad (90)$$

Согласно леммам 10 и 11 и виду интегрального уравнения (14) верно равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t), \varphi(x)\rangle = \langle |\nabla u(x,t)|^q, \varphi(x)\rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)} \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3),$$

Но $\varphi(x)$ может зависеть от $t \in [0,T]$ как от параметра. Поэтому

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t), \varphi(x,t)\rangle_{\mathscr{D}} = \langle |\nabla u(x,t)|^q, \varphi(x,t)\rangle_{\mathscr{D}} \quad \text{при} \quad t \in [0,T] \qquad (91)$$

для всех $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{\infty,1}_{x,t}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$, удовлетворяющих условиям из определения слабого решения.

Далее, поскольку $|\nabla u(x,t)|^q \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b((1+|x|^2)^q;\mathbb{R}^3))$, то справедливо следующее равенство:

$$\langle |\nabla u(x,t)|^q, \varphi(x,t)\rangle_{\mathscr{D}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,t)|^q \varphi(x,t)\, dx \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]. \qquad (92)$$

Теперь проеобразуем левую часть (91).

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t), \varphi(x,t) \rangle =$$

$$= \left\langle \Delta_{3x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sigma_1 \Delta_{2x} u(x,t) + \sigma_3 u_{x_3 x_3}(x,t), \varphi(x,t) \right\rangle =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} \left\langle \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial t}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_j} \right\rangle - \sigma_1 \sum_{j=1}^{2} \left\langle \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_j} \right\rangle -$$

$$- \sigma_3 \left\langle \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_3} \right\rangle . \quad (93)$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^{3} \left\langle \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial t}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_j} \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \nabla \varphi(x,t) \right) \, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \nabla u(x,t)}{\partial t}, \nabla \varphi(x,t) \right) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u(x,t), \nabla \varphi(x,t)) \, dx -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla u(x,t), \nabla \varphi'_t(x,t) \right) \, dx, \quad (94)$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left\langle \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_j}\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[u_{x_1}(x,t)\varphi_{x_1}(x,t) + u_{x_2}(x,t)\varphi_{x_2}(x,t)\right] dx, \tag{95}$$

$$\left\langle \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_3}\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_{x_3}(x,t)\varphi_{x_3}(x,t)\, dx \quad \text{при} \quad t \in [0,T] \tag{96}$$

для всех $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{\infty,1}_{x,t}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$, удовлетворяющих условиям из определения 3 слабого решения.

Теперь проинтегрируем обе части равенства (94) по $t \in [0, T]$ и получим равенство

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{3} \left\langle \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial t}, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_j} \right\rangle dt =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_0(x), \nabla \varphi(x,0))\, dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla u(x,t), \nabla \varphi_t'(x,t)\right) dx\, dt \quad (97)$$

для пробных функций $\varphi(x,t)$ из определения слабого решения (в частности, $\varphi(x,T) = 0$).

Проинтегрируем обе части равенства (91) по $t \in [0, T]$. Тогда с учётом равенств (94)–(97) мы получим равенство (3). Таким образом, при $q > 3/2$ и для произвольных начальных функций $u_0(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы, существует по меньшей мере одно локальное слабое решение задачи Коши в смысле определения 1.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!