О некоторых новых результатах в теории управления классическими распределенными системами и системами с интегральной памятью

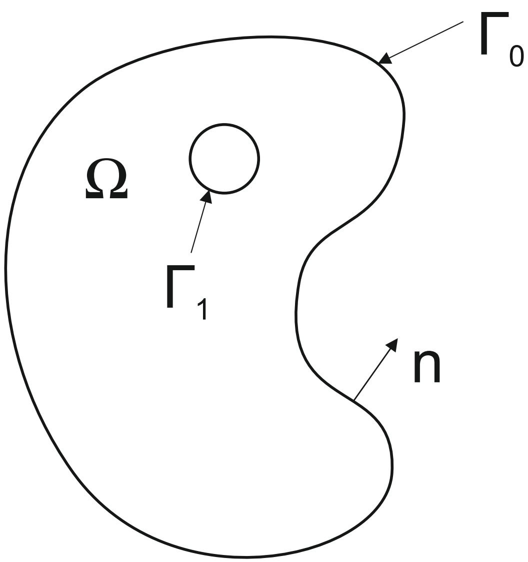
А.С. Шамаев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

27 октября 2022 г.

1 Управление (граничное и распределенное) волновым уравнением.

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= \Delta u \quad \text{в} \quad \Omega,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_0} &= \varphi(x,t),\\
u\big|_{\Gamma_1} &= 0,\\
\big|\varphi(x,t)\big| &\le \varepsilon,\\
u\big|_{t=0} &= u^0(x),\\
\dot{u}\big|_{t=0} &= u^1(x).
\end{aligned}
$$



$u^0 \in H^6(\Omega)$, $u^1 \in H^5(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= \Delta u + f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega,\\
u\big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} &= 0,\\
\big|f(x,t)\big| &\le \varepsilon,\\
u\big|_{t=0} &= u^0(x),\\
\dot{u}\big|_{t=0} &= u^1(x).
\end{aligned}
$$

Ф.Л. Черноусько. 1992г. ПММ.

$u^0 \in H^{2.5+\delta}(\Omega)$, $u^1 \in H^{1.5+\delta}(\Omega)$

Теорема Эйдуса.

Теорема. *Пусть* w_k^2 *— собственные значения оператора Лапласа в ограниченной области* Ω, u_k *— соответствующие собственные функции,*

$$||u_k(x)||_{L_2(\Omega)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_k(x)| \leq C w_k^{d-1} \ln w_k,$$

где d *— размерность пространства.*

(ДАН СССР. 1956 г. 107, №6.)

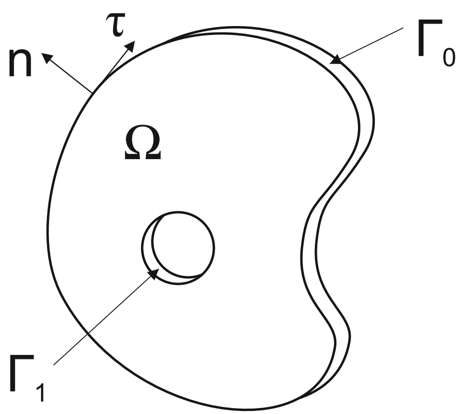
2 Граничное управление пластиной.

$$\ddot{u} + \Delta^2 u = 0$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = u^1(x)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\Delta u + (1-\mu)B_1 u = \varphi(x), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1-\mu)\frac{\partial B_2 u}{\partial \tau} = \psi(x)$$



$$B_1 \equiv 2n_1 n_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - n_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

$$B_2 \equiv (n_1^2 - n_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)$$

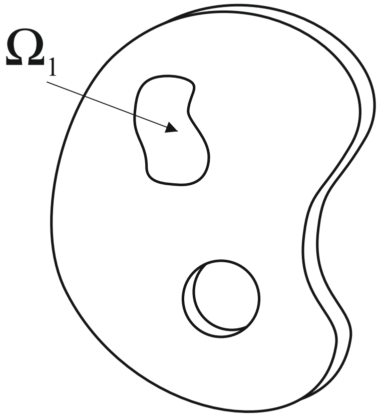
$\varphi(x)$, $\psi(x)$ — управляющие функции

$|\varphi(x)| \leq \varepsilon$, $|\psi(x)| \leq \varepsilon$

$\varphi(x) \in H^6(\Omega)$, $\psi(x) \in H^4(\Omega)$

φ, ψ — финитны в Ω

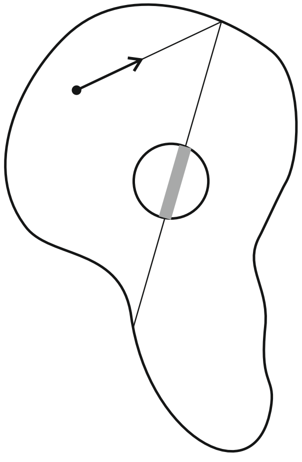
3 Управление пластиной за часть области.



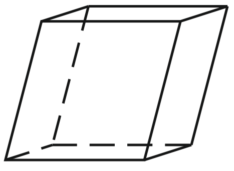
$$\ddot{u} + \Delta^2 u = f(t,x)$$

$f(t,x)$ — управление

$$\operatorname{supp} f(t,x) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$$

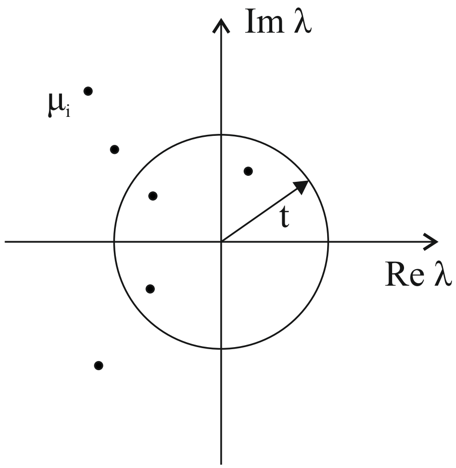


Доказать управляемость для произвольной Ω_1 для периодических краевых условий:



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\Delta\right)$$

4 Задача о приведении в состояние покоя системы с интегральной памятью с помощью распределенного и граничного управления.



Определение. Плотностью последовательности комплексных чисел $\{\mu_i\}$ будем называть величину

$$\Pi(\{\mu_i\}) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\pi}{2} \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt,$$

$n(t)$ — количество точек последовательности $\{\mu_i\}$.

Рассмотрим управление

$\ddot{u} - \Delta u - \int_0^t K'(t-\tau)\Delta u(\tau, x)dx = f(x,t),$

$u|_{t=0} = u^0(x),\ \dot{u}|_{t=0} = u^1(x),$

$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x,t).$

Управляющими функциями могут быть f или φ.
Это уравнение близко к "продифференцированному" по t уравнению Гуртина-Пипкина,

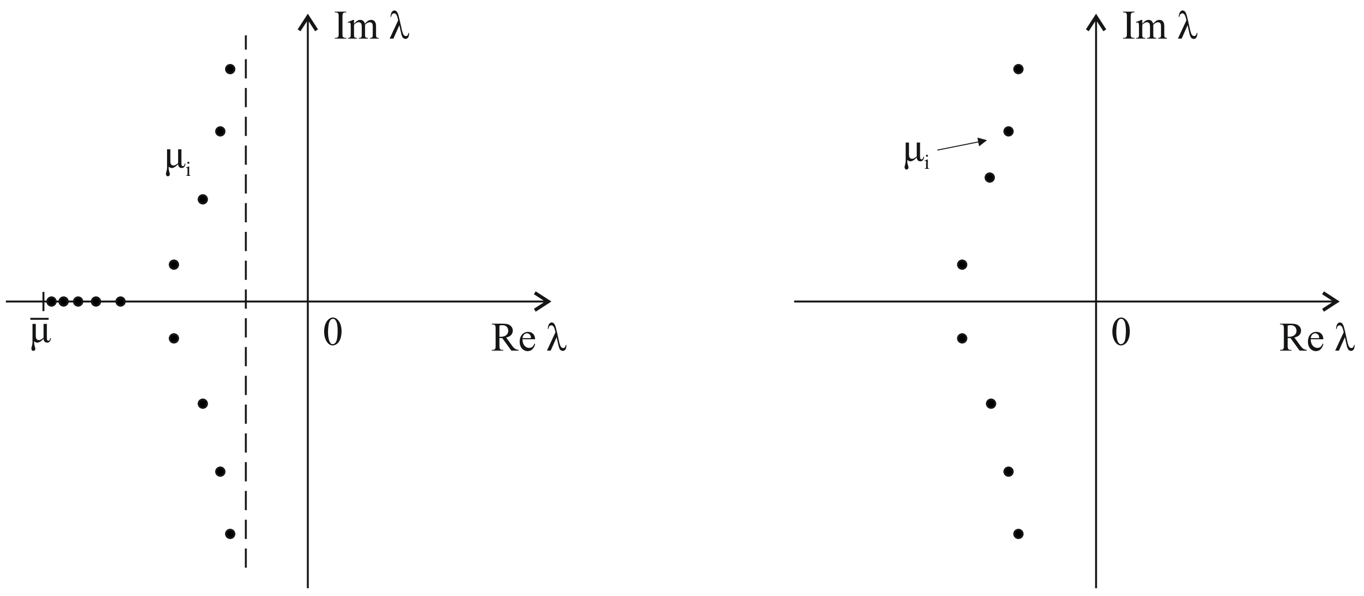
$$\dot{u}(t,x) = \int_0^t K(t-s)\Delta u d\tau.$$

“Препятствия” к граничной управляемости.

1. Преобразование Лапласа ядра $\hat{K}(p)$, будучи аналитически продолжено в комплексную плоскость, имеет изолированный корень p^0,
$$\hat{K}(p^0) = 0.$$

2. Точка $\{0\}$ является точкой ветвления для $\hat{K}(p)$.

3. Пусть $\{\mu_n\}$ — спектр задачи. Тогда условие $\Pi(\{\mu_n\}) = +\infty$ является препятствием для граничной управляемости.



$\overline{\mu}$ — предельная точка для $\{\mu_n\}$.

Препятствия к “распределенной” управляемости.

$$\Pi(\{\lambda_i\}) = \infty,$$

если $K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t}$.

Если сумма конечна, т.е.

$$K(t) = \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-\lambda_i t},$$

то система управляема с помощью граничного управления.

Если

$$K(t) = Э_\alpha(\alpha, \beta, t),$$

$Э_\alpha$ — функция Ю.Н. Работнова и

α — нецелое, между 0 и 1,

то система не является управляемой ни с помощью граничного, ни с помощью распределенного управления.

5 Управление системой "наивной" теории вязко-упругости с помощью граничного и распределенного управления.

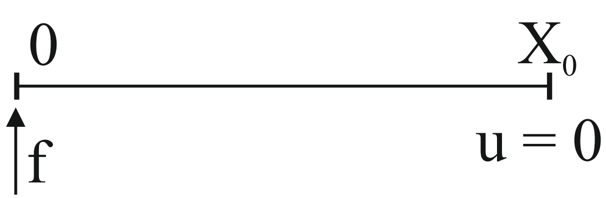
"Наивная" теория вязкоупругости:

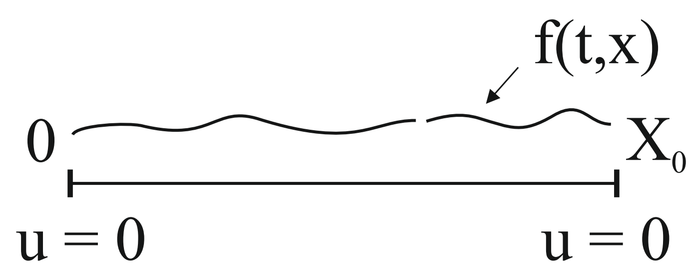
$$P\sigma = Q\varepsilon.$$
$$P = \sum_{p=1}^{N} a_p \frac{d^p}{dt^p}, \quad Q = \sum_{p=1}^{M} b_p \frac{d^p}{dt^p}$$

Граничное управление (в одномерном случае) возможно только в трех случаях, эквивалентных уравнениям

$$\ddot{u} = u_{xx},$$
$$\dot{u} = u_{xx},$$
$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} = u_{xx}.$$

Распределенное управление возможно всегда.





Список литературы

[1] Черноусько Ф.Л. Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами // Прикл. матем. и мех. 1992, Т. 56. №5. С. 810-826.

[2] Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 45, №6, С. 1095-1103.

[3] Gurtin M. E., Pipkin A. C. A General Theory of Heat Conduction With Finite Wave Speeds // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. № 31. P. 113-126.

[4] Russell D. L. Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions. // SIAM Review. 1978. V. 20. №4. P. 639-739.

[5] Lagnese J. Decay of Solutions of Wave Equations in a Bounded Region with Boundary Dissipation // Journal of Differential Equations. 1983, №50. P. 163-182.

[6] Lions J. L. Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // SIAM Review. 1988. V. 30 №1. P. 1-68.

[7] vanov S., Pandolfi L. Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // J. Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 355. №1. P. 1-11.

[8] Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S. Spectral Analysis and Correct Solvability of Abstract Integro-Differential Equations Arising in Thermophysics and Acoustics // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2011. V. 39. P. 36-65.

[9] Chaves-Silva F. W., Rosier L., Zuazua E. Null controllability of a system of viscoelasticity with a moving control. // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 2014, V. 101 №2, P. 198-222.

[10] Chaves-Silva F. W., Zhang X., Zuazua E. Controllability of Evolution Equations with Memory. // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017, V. 55 №4, DOI:10.1137/151004239.

[11] Biccari U., Micu U. Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // J. Differential Equations. 2019. № 267. P. 1376-1422.

Список литературы

[1] Романов И. В. О невозможности приведения плоской мембраны в состояние покоя с помощью граничных сил. // Автоматика и телемеханика. 2012, №12, С. 56-64.

[2] Романов И. В., Шамаев А. С. О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием. // Автоматика и телемеханика. 2013, №11, С. 49-61.

[3] Romanov I., Shamaev A. Exact Controllability of the Distributed System, Governed by String Equation with Memory // J. Dynamical and Control Systems. 2013. V. 19. №4. P. 611-623.

[4] Romanov I., Shamaev A. Exact Controllability of the Distributed System Governed by the Wave Equation With Memory // arXiv. doi 1503.04461.

[5] Romanov I., Shamaev A. Non-controllability to Rest of the Two-Dimensional Distributed System Governed by the Integrodifferential Equation // J. Optimization Theory and Applications. 2016. V. 170. №3. P. 772-782.

[6] Романов И. В., Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе // Доклады Академии Наук. Теория управления. 2016, Т. 470 №1, С. 22-25.

[7] Romanov I., Shamaev A. Some Problems of Distributed and Boundary Control for Systems with Integral Aftereffect. // Journal of Mathematical Sciences. 2018, V. 234, №4, P. 470-484.

[8] Romanov I., Romanova A. Some Problems of Controllability of Distributed Systems Governed by Integrodifferential Equations // IFAC-PapersOnLine. 2018, V. 51, № 2, P. 132-137.

[9] Романов И. В., Шамаев А. С. О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением. // Изв. РАН. ТиСУ. 2019, №1, С. 109-116.

[10] Romanov, I. V., Shamaev, A. S. Suppression of Oscillations of Thin Plate by Bounded Control Acting to the Boundary. Journal of Computer and Systems Sciences International. V. 59 (3), 371-380 (2020)

[11] Romanova A. V., Romanov I. V. On the Problems of Controllability and Uncontrollability for Some Mechanical Systems Described by the Equations of Vibrations of Plates and Beams with Integral Memory // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021, V. 1083, № 012041, P 1-9.

[12] Romanov I., Shamaev A. Exact Bounded Boundary Controllability to Rest for the Two- Dimensional Wave Equation. // Journal of Optimization Theory and Applications. V. 188, (3) (2021) 925-938.

[13] Романов И. В. Исследование управляемости для некоторых динамических систем с распределенными параметрами, описываемых интегродифференциальными уравнениями. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022, №3, С. 58-61.

[14] Романов И. В., Шамаев А. С. Точное управление распределенной системой, описываемой волновым уравнением с интегральной памятью // Проблемы математического анализа. 2022, №115, С. 1-15.

[15] Романов И. В., Шамаев А. С. Три исключительных случая в задачах граничной управляемости для моделей "наивной механики"// Подготовлен текст статьи.