Математическая модель Гамма-Грек опциона на основе уравнения реакции–диффузии

А.А. Дончак, Р.В. Бризицкий, А.В. Бризицкая

Вторая конференция Математических центров России
7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва

План доклада

Представленный доклад состоит из трех частей:

1. Анализ краевой задачи для линейного уравнения реакции–диффузии в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^4$. Разрешимость, принцип максимума и минимума;
2. Постановка и разрешимость мультипликативной задачи управления, вывод системы оптимальности и принципа bang-bang;
3. Краевая задача для полулинейного уравнения реакции–диффузии.

Задача 1

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ с границей Γ рассматривается следующая краевая задача:

$$-\lambda\Delta\varphi + k(x)\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{1}$$

φ – цена опциона;
λ – постоянный коэффициент, являющийся аналогом коэффициента диффузии;
$k = k(\mathrm{x})$ – понижающий коэффициент, являющийся аналогом коэффициента реакции;
функция f моделирует рост стоимости опциона.

Происхождение

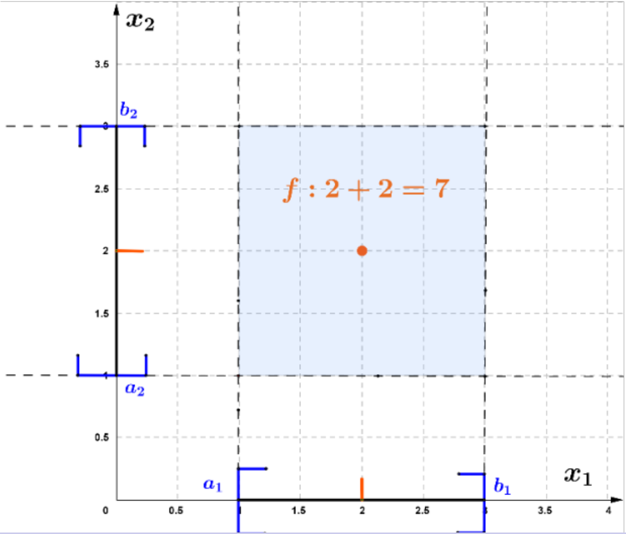
γ–грек: $u'' = -k\,u$, где u – премия с портфеля.

Основные пространства и условия

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^4$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$. Четырехмерный прямоугольный параллелепипед образованный Декартовым произведением отрезков $[a_i, b_i], i = \overline{1,4}$, т.к. цена каждого актива изменяется в пределах $[a_i, b_i], a_i \leq 0, b_i < \infty$;

(ii) $f \in L^2(\Omega),\ k \in L^2(\Omega),\ \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Визуализация модели при n = 2



Слабая формулировка задачи 1

Умножим уравнение (1) на функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрируем с применением формулы Грина. Получим:

$$
\begin{gathered}
-\lambda(\nabla\varphi, \nabla h) + (k(x)\varphi, h) = (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \\
\varphi = \psi \text{ на } \Gamma.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Опредеделение 1

Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (2), назовем слабым решением задачи (1).

Разрешимость задачи 1

Лемма 1

При выполнении условия (i) для любой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ такая, что $\varphi_0 = \psi$ на Γ и с некоторой константой C_Γ, зависящей от Ω и Γ, справедлива оценка:

$$\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\ \Gamma}.$$

Теорема 1

При выполнении условий (i), (ii) существует единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ для задачи (1) и справедлива априорная оценка:

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq \lambda_*^{-1}(\|f\|_\Omega + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + C_\Gamma\|k\|_\Omega\|\psi\|_{1/2,\Gamma}) + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}$$

Принцип максимума и минимума

(iii) $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}, \quad k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ п.в. в Ω,

(iv) $\psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}$ п.в. на Γ.

Лемма 2

При выполнении условий (i)-(iv) для слабого решения $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи (1) справедлив следующий принцип максимума и минимума:

$$m \leq \varphi \leq M \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$$M = \max\left\{\psi_{\max}, \frac{f_{\max}}{k_{\min}}\right\}, \quad m = \min\left\{\psi_{\min}, \frac{f_{\min}}{k_{\max}}\right\}$$

Постановка задачи управления

Функция $k(x)$ - управление для задачи (1). Предположим, что она может изменяется в некотором множестве $K (k \in K)$, удовлетворяющем условию:
(j) $K \subset L^2(\Omega)$ – непустое выпуклое замкнутое множество.

(jj) $\mu_0 > 0,\ \mu_1 \geq 0$ и K – ограниченное множество, или $\mu_0 > 0,\ \mu_1 > 0$ и функционал I ограничен снизу.

Сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$
\begin{aligned}
J(\varphi, k) = \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|k\|^2_\Omega \to \inf,\\
F(\varphi, k) = 0, \quad (\varphi, k) \in H^1(\Omega) \times K.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Разрешимость задачи управления

Обозначим через
$Z_{ad} = \{(\varphi, k) \in H_1(\Omega) \times K : F(\varphi, k) = 0, \quad J(\varphi, k) < \infty\}$
множество допустимых пар для задачи (4).

Теорема 2

Пусть выполнены условия (i), (ii) и (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество Z_{ad} не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi, k) \in H_1(\Omega) \times K$ задачи (4).

Доказательство

$\varphi_m \to \varphi$ слабо в $H^1(\Omega) \Rightarrow$ сильно в $L^p,\ p < 4$;
$k_m \to k$ слабо в $L^2(\Omega)$.

Покажем, что $(k_m(\varphi_m - \varphi), h) \to 0 \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega)$.

Будем использовать $h_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad h_n \to h$ в $H^1(\Omega)$. Получим:

$$\begin{aligned}(k_m(\varphi_m - \varphi), h) &= (k_m(\varphi_m - \varphi), h_n) + (k_m(\varphi_m - \varphi), h - h_n) \ \leq \\ &\leq \ \|k_m\|_\Omega \cdot \|\varphi_m - \varphi\|_{L^3(\Omega)} \cdot \|h_n\|_{L^6(\Omega)} + \\ &+ \ \|k_m\|_\Omega \cdot \|\varphi_m - \varphi\|_{L^4(\Omega)} \cdot \|h - h_n\|_{L^4(\Omega)}\end{aligned}$$

Здесь $\|k_m\|_\Omega \cdot \|\varphi_m - \varphi\|_{L^3(\Omega)} \cdot \|h_n\|_{L^6(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$ и
$\|k_m\|_\Omega \cdot \|\varphi_m - \varphi\|_{L^4(\Omega)} \cdot \|h - h_n\|_{L^4(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty \quad \blacksquare$

Вывод системы оптимальности

Теорема 3

Пусть выполняются условия (i), (ii) и элемент $(\hat{\varphi}, \hat{k}) \in H^1(\Omega) \times K$ является точкой локального минимума задачи (2). Пусть так же функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по Фреше в точке $\hat{\varphi}$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа (θ, ζ) такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$(\nabla\tau, \nabla\theta) + (k\tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_\Gamma = -\mu_0(\varphi - \varphi_d, \tau) \quad \forall \tau \in H^1(\Omega) \quad (5)$$

и справедлив принцип минимума

$$(k - \hat{k}, \hat{\varphi}\theta) \geq 0 \quad \forall k \in K. \quad (6)$$

Принцип bang-bang или релейность управления

(j′) $k_{\min} \le k \le k_{\max}$ п.в. в Ω.

Теорема 4

При выполнении условия (j′) неравенство (6) эквивалентно следующему неравенству:

$$(k - \hat{k})\hat{\varphi}\theta \ge 0 \quad \text{п.в. в } \Omega \ \forall k \in K.$$

С учетом неравенства $\varphi \ge m$, будем иметь:

$$(k - \hat{k})\theta \ge 0 \quad \text{п.в. в } \Omega \ \forall k \in K. \tag{7}$$

Тогда $\hat{k} = k_{\max}$ при $\theta < 0$ и $\hat{k} = k_{\min}$ при $\theta > 0$

$$k : k \to k_{\max} \to k_{\min} \qquad \text{bang-bang}$$

Строгое свойство bang-bang

Пусть $I(\varphi) = \|\varphi - \varphi_d\|_\Omega^2$ и $\varphi \neq \varphi_d$ в Ω или $I(\varphi) > 0$ в Ω.

Из уравнения Эйлера–Лагранжа вытекает, что

$$-\Delta\theta + \hat{k}\,\theta = -(\varphi - \varphi_d) \text{ п.в. в } \Omega. \tag{8}$$

Если $\varphi \neq \varphi_d$ п.в. в Ω, тогда $\theta \neq 0$ п.в. в Ω (строгий bang-bang).

Строгое свойство bang-bang

Если $\varphi = \varphi_d$ в $Q \subset \Omega$, meas $Q > 0$, тогда из (8) вытекает, что

$$-\Delta\theta + \hat{k}\,\theta = 0 \text{ п.в. в } Q. \tag{9}$$

В то же время, если $\theta = 0$ п.в. в $Q_0 \subset Q \subset \Omega$, meas $Q_0 > 0$, тогда $\theta = 0$ п.в. в Ω (принцип единственности продолжения для эллиптических уравнений).
Но равенство $\theta = 0$ п.в. в Ω противоречит Теореме 3. Значит, $\theta \neq 0$ п.в. в Ω.

Cheboterev A.Yu. // Comp. Math. Math. Phys. 2022.
Wolf T.H. // Geomet. Funct. Analysis. 1992.

Полулинейная модель

Рассматривается следующая краевая задача

$$-\lambda\Delta\varphi + k(\varphi,\mathrm{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \qquad (10)$$

Введем следующий оператор

$$\langle A(\varphi),\ h\rangle = (\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi,\mathrm{x})\varphi,\ h).$$

Если нелинейность $k(\varphi,\mathrm{x})\varphi$ монотонна в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1,\mathrm{x})\varphi_1 - k(\varphi_2,\mathrm{x})\varphi_2,\ \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \quad \forall\varphi_1,\varphi_2 \in H^1(\Omega)$$

то оператор A тоже монотонен:

$$\langle A(\varphi_1) - A(\varphi_2),\ \varphi_1 - \varphi_2\rangle \geq 0 \quad \forall\varphi_1,\varphi_2 \in H^1(\Omega).$$

$k(\varphi,\mathrm{x})$ – дорогой актив труднее продать.

Дополнительные условия

(v) $\psi_{\min} \le \psi \le \psi_{\max}$ п.в. на Γ, $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω, где $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$ неотрицательные числа.

(vi) $k(\varphi, \mathrm{x}) = a(\mathrm{x})k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной функцией, $0 < a_{\min} \le a(\mathbf{x}) \le a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω и функциональные уравнения

$$k_1(s)s = \frac{f_{\max}}{a_{\min}}, \tag{11}$$

$$k_1(s)s = \frac{f_{\min}}{a_{\max}}, \ \ s > 0 \tag{12}$$

имеют хотя бы одно (положительное) решение.

Принцип максимума и минимума

Лемма 4
Пусть выполнены условия (i), (ii) и (v), (vi). Тогда справедлив следующий принцип максимума и минимума:

$$m \le \varphi \le M \text{ п.в. в } \Omega, \tag{13}$$

$$M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}.$$

Здесь M_1 — минимальный корень уравнения (11), а m_1 — максимальный корень уравнения (12).

Например, если $k_1(\varphi) = \varphi^2$, то $M_1 = \left(\frac{f_{\max}}{a_{\min}}\right)^{1/3}$.

Мультипликативная задача управления

Пусть $k(\varphi, \mathrm{x}) = a(\mathrm{x})|\varphi|$ и функция $a(\mathrm{x})$ является управлением, которое может меняться в некотором множестве K и выполняется следующее условие
(j$''$) $a_{\min} \le a(\mathrm{x}) \le a_{\max}$.

Сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$\begin{gathered} J(\varphi) = (1/2)I(\varphi) \to \inf, \\ F(\varphi, a) = 0, \quad (\varphi, a) \in H^1(\Omega) \times K. \end{gathered} \tag{14}$$

Для оптимальных решений задачи (14) справедлив строгий принцип bang-bang.