ПРОЦЕССЫ КОНЦЕНТРАЦИИ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Ю. Г. Рыков

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Вторая конференция математических центров России, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 07-11 ноября 2022 года

10 ноября 2022 г.

ПЛАН ПРЕЗЕНТАЦИИ

- **Одномерный случай, решения в виде мер, существование, единственность, вариационный принцип**
- **Двумерный случай, формирование особенностей на кривых, столкновение кривых**
- **Вариационное описание и двумерная задача Римана**
- **Существование иерархии особенностей, численные расчеты**
- **Использование в астрофизике – крупномасштабная структура Вселенной**

1. Зельдович Я.Б. Распад однородного вещества на части под действием тяготения // Астрофизика 6:2, 319–335 (1970). Zel'dovich Ya.B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations // Astron. Astrophys. 5, 84 – 89 (1970).
2. Крайко А. Н., О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления // Прикл. Матем. Мех. 43:3, 500–510 (1979).
3. Bouchut F. On zero-pressure gas dynamics // in: B. Perthame (Ed.), Advances in Kinetic Theory and Computing, series on Advances in Mathematics and Applied Sciences. Singapore.: World Scientific 22, 171190 (1994).

ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ, РЕШЕНИЯ В ВИДЕ МЕР, СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

ОДНОМЕРНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим так называемую систему уравнений ГДбД

$\rho_t + (\rho u)_x = 0, (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = 0,$ ρ-плотность, u-скорость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением системы назовем пару мер Радона $P_t(x)$ и $I_t(x)$ слабо непрерывных по t, $I_t(x)$ абсолютно непрерывна относительно $P_t(x)$, $u(t,x) \equiv dI_t(x) / dP_t(x)$ и для $f, g \in C_0^1(\mathbb{R}), 0 < t_1 < t_2$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dP_{t_2}(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_{t_1}(x) = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\mathbb{R}} f'(x) dI_\tau(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dI_{t_2}(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) dI_{t_1}(x) = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\mathbb{R}} g'(x) u(\tau, x) dI_\tau(x)$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ В ГЛАДКОМ СЛУЧАЕ

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = 0$$
$$u(0,x) = u_0(x), \rho(0,x) = \rho_0(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u = 0$$

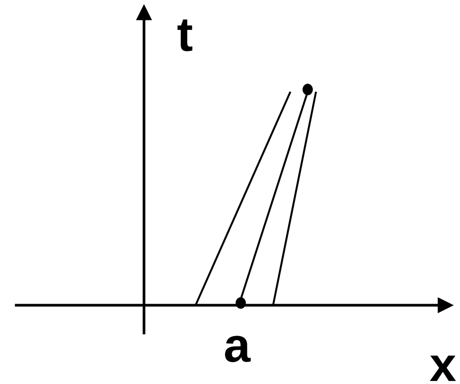
$$\dot{x} = u$$
$$\dot{u} = 0$$
$$\dot{\rho} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{t}\cdot \mathrm{u}_0(\mathrm{a})$$
$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_0(\mathrm{a})$$
$$\rho = \frac{\rho_0(\mathrm{a})}{1 + \mathrm{t}\cdot \mathrm{u}_0'(\mathrm{a})}$$

РЕШЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

$$\begin{cases} \varrho_t + (\varrho u)_x = 0 \\ (\varrho u)_t + (\varrho u^2)_x = 0 \end{cases}$$



Вид решения:

$$\varrho = \varrho^- + (\varrho^+ - \varrho^-)\, H(x - s(t)) + P(t)\,\delta(x - s(t))$$

$$u = u^- + (u^+ - u^-)\, H_{\dot{s}}(x - s(t))$$

Соотношения Ренкина-Гюгонио:

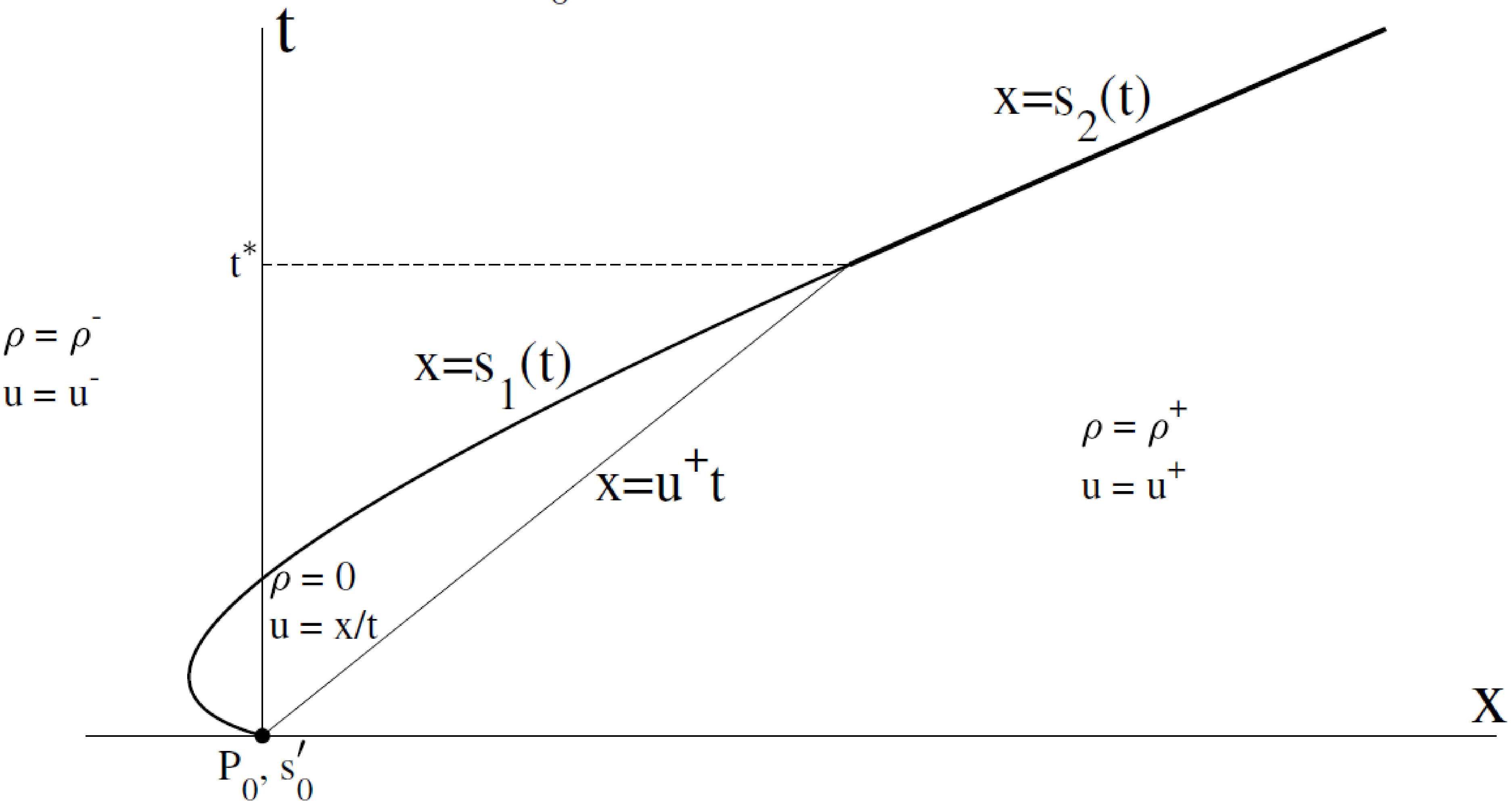
$$[\varrho]\,\dot{s} - [\varrho u] - \dot{P} = 0$$

$$[\varrho u]\,\dot{s} - [\varrho u^2] - (\dot{s}P)^{\cdot} = 0$$

1. Weinan E, Yu. G. Rykov, and Ya. G. Sinai, The Lax–Oleinik variational principle for some one-dimensional system of quasilinear equations // Russ. Math. Surv. 50, 220–222 (1995).
2. E. Grenier, Existence globale pour la systeme des gaz sans pression // C. R. Acad. Sci., Ser. 1: h. 321, 171–174 (1995).

ХАРАКТЕРНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ

$$s_0' < u^+ < u^-$$



ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Пусть ρ и u рассматриваются как обобщенные решения ГДбД :

$\rho_t + \left(\rho u\right)_x = 0, \left(\rho u\right)_t + \left(\rho u^2\right)_x = 0,$ ρ-плотность, u-скорость.

ТЕОРЕМА. Пусть $P_0\left(x\right) \geq 0 \ \in \mathrm{M}_{loc}\left(\mathbb{R}\right)$ и $u_0\left(x\right)$ ограничена и измерима относительно P_0. Тогда обобщенное решение существует. Если же выполнено 1) условие Олейник:

$$\frac{u\left(t, x_2\right) - u\left(t, x_1\right)}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{t}$$ для всех $x_1 < x_2$ и п.в. $t > 0$ и

2) мера ρu^2 слабо сходится к $\rho_0 u_0{}^2$ при $t \to 0$, то обобщенное решение единственно.

1. F. Huang and Z. Wang, Well posedness for pressureless flow // Comm. Math. Phys. 222, 117–146 (2001).

2. J. Li and G. Warnecke, Generalized characteristics and the uniqueness of entropy solutions to zero-pressure gas dynamics // Adv. Differ. Equat. 8, 961–1004 (2003).

Hynd, Sticky particle dynamics on the real line // Not. Am. Math. Soc. 66, 162–168 (2019).

ВАРИАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим функцию:

$$F(t,x;a)=\int_{0-0}^{a-0}\left[u_0(s)-\frac{x-s}{t}\right]P_0(ds)$$

Найдем глобальные минимумы *a(t,x)*. Если такой минимум один, то

$$u(t,x)=\frac{x-a(t,x)}{t},\ \rho(t,x)dx=P_0(da),\quad \mathrm{x}=\mathrm{a}+\mathrm{t}\cdot\mathrm{u}_0(\mathrm{a});$$

если нет, то имеем точку разрыва скорости и $P_t(x;dx)=\int_{a_{\min}(t,x)}^{a_{\max}(t,x)}P_0(da)$

1. О.А. Олейник, Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Труды Моск. Мат. Об-ва. 5, 433–454 (1956).
2. Weinan E, Yu. G. Rykov, and Ya. G. Sinai, Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in [adhe]sion particle dynamics // Comm.Math.Phys. 177, 349–380 (1996).

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ КОНЦЕНТРАЦИИ

Если для каждого t точка $\left(t, x(t)\right)$ является точкой концентрации, то:

$$F\left(t, x; a_{\max}\right) - F\left(t, x; a_{\min}\right) = \int\limits_{a_{\min}(t,x(t))}^{a_{\max}(t,x(t))} \left[u_0(s) - \frac{x(t) - s}{t} \right] P_0(ds) = 0$$

Дифференцируя по t, получим

$$0 = \int\limits_{a_{\min}(t,x(t))}^{a_{\max}(t,x(t))} \left[\frac{s - \dot{x}(t)}{t} - \frac{s - x(t)}{t^2} \right] P_0(ds) =$$

$$\frac{1}{t} \left\{ -\dot{x}(t) \int\limits_{a_{\min}(t,x(t))}^{a_{\max}(t,x(t))} P_0(ds) + \int\limits_{a_{\min}(t,x(t))}^{a_{\max}(t,x(t))} u_0(s) P_0(ds) \right\}.$$

ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ВАРИАЦИОННОГО ОПИСАНИЯ

Фиксируем $t > 0$. Пусть A есть множество отрезков вида $\left(a_{\min}(t,x), a_{\max}(t,x)\right)$, а $B = A \cup \{$множество всех отрезков в $\mathbb{R} \setminus A\}$.

Пусть $F\left(t,x;[a_1,a_2]\right) = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left[u_0(s) - \frac{x-s}{t}\right] P_0(ds)$, определим $\delta F / \delta a$:

$$\frac{\delta F}{\delta a} = \lim_{[a_1,a_2]\downarrow \min} \frac{1}{a_2 - a_1} \int\limits_{a_1}^{a_2} \left[u_0(s) - \frac{x-s}{t}\right] P_0(ds) = 0, \ a \in [a_1, a_2] \in B.$$

Тогда для любого $t > 0$ обобщенное решение характеризуется тем, что $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x : \dfrac{\delta F(t,x;a)}{\delta a} = 0.$

ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ, ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НА КРИВЫХ, СТОЛКНОВЕНИЕ КРИВЫХ

ДВУМЕРНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2)=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{x}=u$$

$$\dot{y}=v$$

$$\dot{u}=0\,;\,\dot{v}=0$$

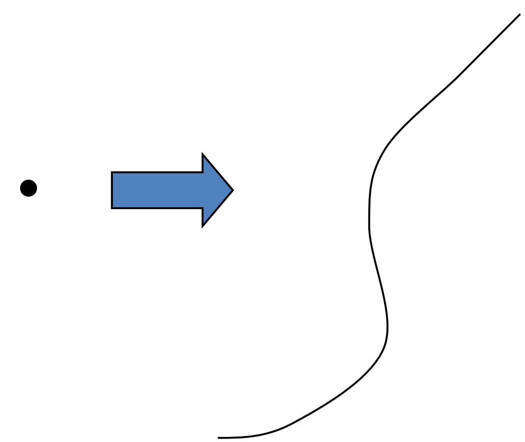
$$\dot{\rho}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$\mathrm{x}=\mathrm{a}+\mathrm{t}\cdot\mathrm{u}_0(\mathrm{a},\mathrm{b})$$

$$\mathrm{y}=\mathrm{b}+\mathrm{t}\cdot\mathrm{v}_0(\mathrm{a},\mathrm{b})$$

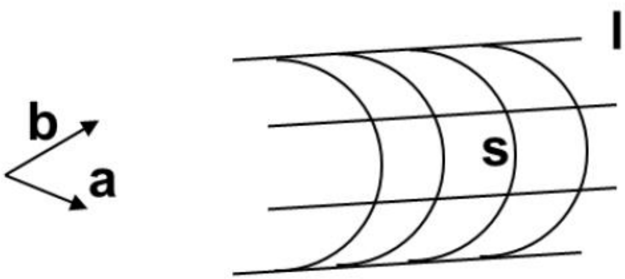
$$\mathrm{u}=\mathrm{u}_0(\mathrm{a},\mathrm{b})\,;\,\mathrm{v}=\mathrm{v}_0(\mathrm{a},\mathrm{b})$$

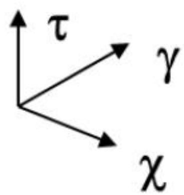
$$\rho=\frac{\rho_0(\mathrm{a},\mathrm{b})}{1+\mathrm{t}\cdot\mathrm{div}\mathrm{U}_0+\mathrm{t}^2\cdot\mathrm{rot}\mathrm{U}_0}$$

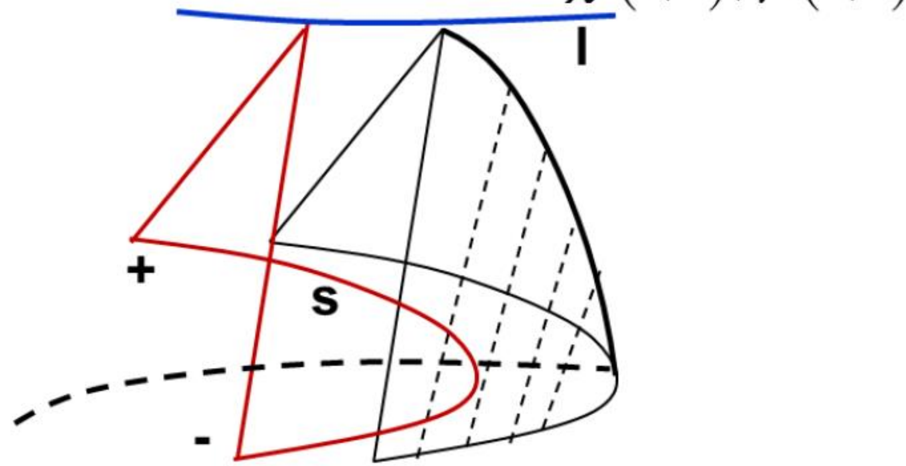


ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

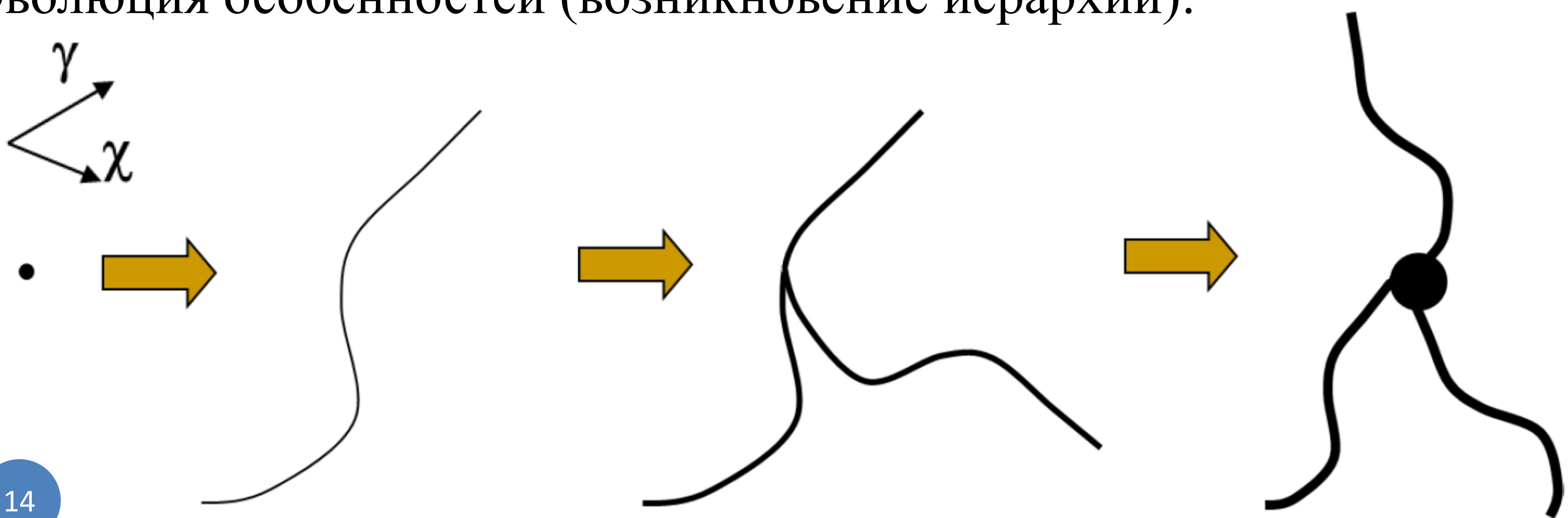
Формирование особенностей на кривых:







Эволюция особенностей (возникновение иерархии):



СООТНОШЕНИЯ РЕНКИНА-ГЮГОНИО

$$\begin{cases} \varrho_t + (\varrho u)_x + (\varrho v)_y = 0 \\ (\varrho u)_t + (\varrho u^2)_x + (\varrho u v)_y = 0 \\ (\varrho v)_t + (\varrho u v)_x + (\varrho v^2)_y = 0 \end{cases}$$

Соотношения Ренкина-Гюгонио:

$$\left(\widetilde{P}_t\right)^{\cdot} + x_l\left\{V(\varrho_+ - \varrho_-) - (\varrho_+ v_+ - \varrho_- v_-)\right\} +$$
$$y_l\left\{(\varrho_+ u_+ - \varrho_- u_-) - U(\varrho_+ - \varrho_-)\right\} = 0$$

$$\dot{y} = V \quad , \quad \dot{x} = U \; ,$$
$$U = \widetilde{I}_t/\widetilde{P}_t, \; V = \widetilde{J}_t/\widetilde{P}_t$$

$$\left(\widetilde{I}_t\right)^{\cdot} + x_l\left\{V(\varrho_+ u_+ - \varrho_- u_-) - (\varrho_+ u_+ v_+ - \varrho_- u_- v_-)\right\} +$$
$$y_l\left\{(\varrho_+ u_+^2 - \varrho_- u_-^2) - U(\varrho_+ u_+ - \varrho_- u_-)\right\} = 0$$

$$\left(\widetilde{J}_t\right)^{\cdot} + x_l\left\{V(\varrho_+ v_+ - \varrho_- v_-) - (\varrho_+ v_+^2 - \varrho_- v_-^2)\right\} +$$
$$y_l\left\{(\varrho_+ u_+ v_+ - \varrho_- u_- v_-) - U(\varrho_+ v_+ - \varrho_- v_-)\right\} = 0$$

1. Li J., Zhang T., Yang S. L. The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics. London.: Longman, 1998.
2. Рыков Ю.Г. Особенности типа ударных волн в среде без давления, решения в смысле теории меры и в смысле Коломбо // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. №30.
3. Yu. G. Rykov. On the non-hamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 5-B,1, 55–78 (2002).

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА СООТНОШЕНИЙ РЕНКИНА-ГЮГОНИО

Фиксируем $t > 0$. На кривых с особенностями справедливы соотношения:

$$\int_0^t \left[\chi(t,l) - a_+(s,l) - tu_0^+(s,l)\right]\rho_0(a_+,b_+)\left[(a_+)_s(b_+)_l - (b_+)_s(a_+)_l\right]ds =$$

$$\int_0^t \left[\chi(t,l) - a_-(s,l) - tu_0^-(s,l)\right]\rho_0(a_-,b_-)\left[(a_-)_s(b_-)_l - (b_-)_s(a_-)_l\right]ds\,;$$

$$\int_0^t \left[\gamma(t,l) - b_+(s,l) - tv_0^+(s,l)\right]\rho_0(a_+,b_+)\left[(a_+)_s(b_+)_l - (b_+)_s(a_+)_l\right]ds =$$

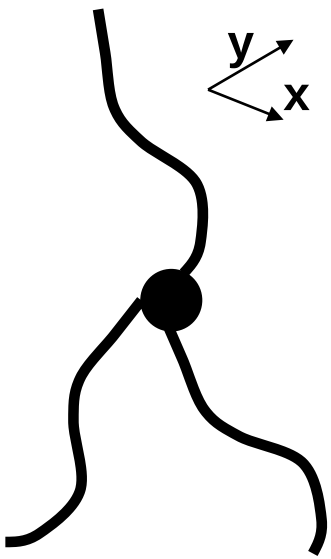
$$\int_0^t \left[\gamma(t,l) - b_-(s,l) - tv_0^-(s,l)\right]\rho_0(a_-,b_-)\left[(a_-)_s(b_-)_l - (b_-)_s(a_-)_l\right]ds.$$

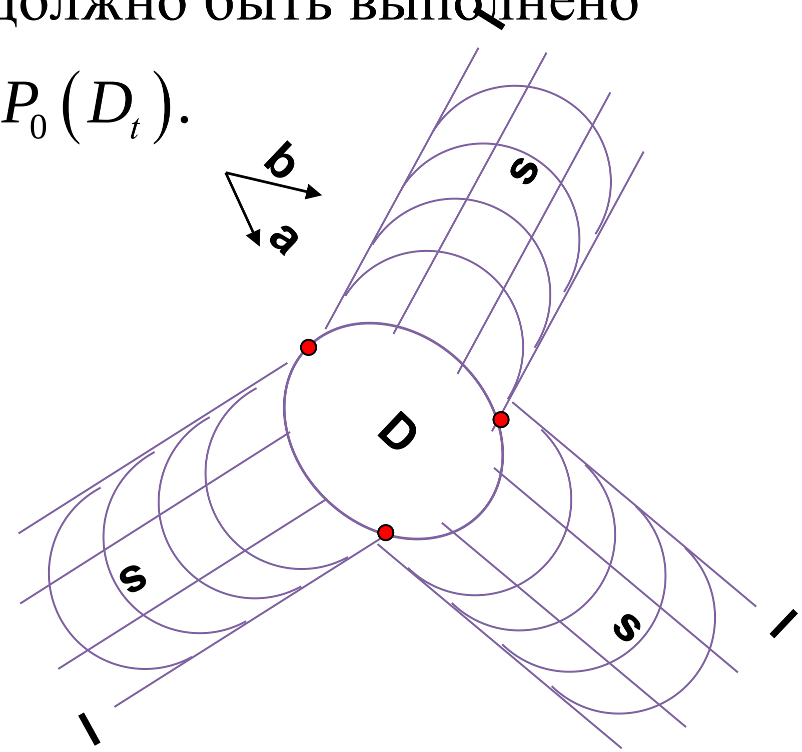
1. Рыков Ю.Г. Особенности типа ударных волн в среде без давления, решения в смысле теории меры и в смысле Коломбо // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. №30.
2. Yu. G. Rykov. On the non-hamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 5-B,1, 55–78 (2002).

ОБРАЗОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ В ТОЧКЕ

ТЕОРЕМА. Пусть имеет место геометрическая конфигурация, представленная ниже. Для кривых выполнены соотношения Ренкина-Гюгонио. Тогда в точке должно быть выполнено

$$\left(U_{Точки}, V_{Точки}\right) = \left(I_0\left(D_t\right), J_0\left(D_t\right)\right) / P_0\left(D_t\right).$$





1. Рыков Ю.Г. Вариационный принцип для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления // УМН, 51:1 (307), 165–166 (1996).
2. Рыков Ю.Г. Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 94.
3. Аптекарев А. И., Рыков Ю. Г. Детализация механизма образования особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления // ДАН, 484:6, 655–658 (2019).

ВАРИАЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ И ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА

ФОРМУЛИРОВКА ВАРИАЦИОННОГО ОПИСАНИЯ

Пусть $\boldsymbol{a}=(a,b)$, $\boldsymbol{x}=(x,y)$, $\boldsymbol{u}_0=(u_0,v_0)$.

Фиксируем $t>0$. Пусть A_1 есть множество непересекающихся в $\mathbb{R}^2$ областей $\{G_\alpha\}$, A_2 есть множество областей $\{G_\beta\}$ вида: $s\in\left[s_\beta^1,s_\beta^2\right]$, $l\in\left[l_\beta^1,l_\beta^2\right]$, $G_\beta=\left\{\boldsymbol{a}_\beta(s,l),s\in\left[s_\beta^1,s_\beta^2\right],l\in\left[l^1,l^2\right]\subset\left[l_\beta^1,l_\beta^2\right]\right\}$,

а $B=A_1\cup A_2\cup\left\{\text{множество всех областей в } \mathbb{R}^2\setminus(A_1\cup A_2)\right\}$.

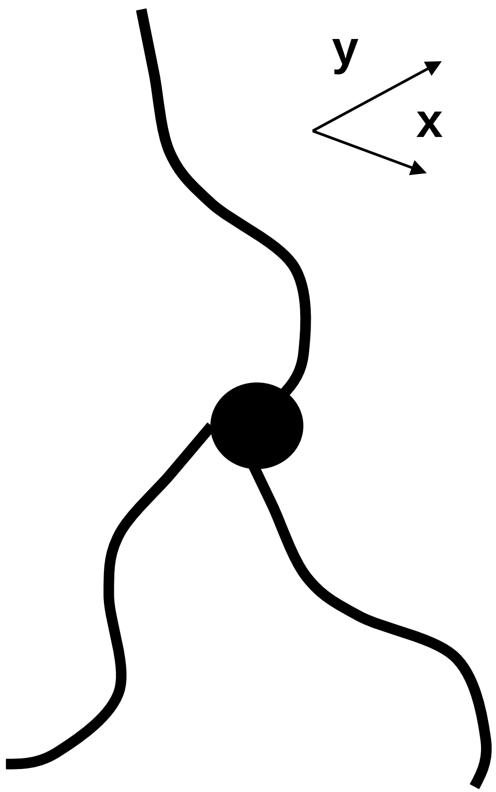
Пусть $\boldsymbol{F}(t,x;G)=\iint\limits_G\left[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{a})-\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{t}\right]P_0(d\boldsymbol{a})$, $G\in B$. Определим $\delta\boldsymbol{F}/\delta\boldsymbol{a}$:

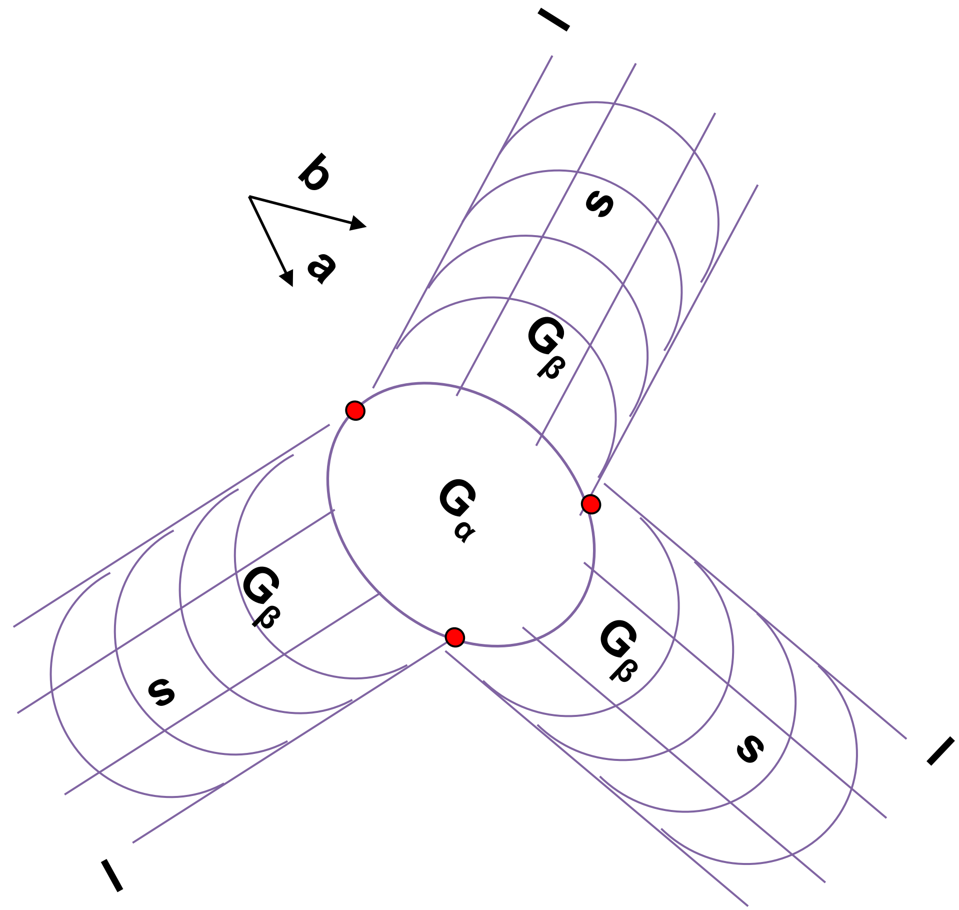
$$\frac{\delta\boldsymbol{F}}{\delta\boldsymbol{a}}=\lim_{|G|\downarrow\min}\frac{1}{|G|}\iint\limits_G\left[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{a})-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{t}\right]P_0(d\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{a}\in G\in B.$$

Тогда для любого $t>0$ обобщенное решение характеризуется тем,

что $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2\ \exists\boldsymbol{x}:\dfrac{\delta\boldsymbol{F}(t,x;G)}{\delta\boldsymbol{a}}=0.$

ПОЯСНЯЮЩИЙ РИСУНОК К ВАРИАЦИОННОМУ ОПИСАНИЮ





АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Введем обозначения: $\boldsymbol{\chi} = (\chi, \gamma)$; $\boldsymbol{u} = (u, v)$; $\boldsymbol{U} = (U, V)$; $\boldsymbol{I}_t = (I_t, J_t)$

Тогда соотношения Ренкина-Гюгонио для задачи Римана:

$$\begin{cases} \dot{P}_t = \chi_l \{V[\rho] - [\rho v]\} - \gamma_l \{U[\rho] - [\rho u]\} \\ \dot{\boldsymbol{I}}_t = \chi_l \{V[\rho \boldsymbol{u}] - [\rho v \boldsymbol{u}]\} - \gamma_l \{U[\rho \boldsymbol{u}] - [\rho u \boldsymbol{u}]\} \\ \dot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{U} \end{cases} \qquad [f] \equiv f^+ - f^-$$

Эта система обладает первым интегралом:

$$P\{u^+ v^- - u^- v^+ + [v]U - [u]V\} = C(l).$$

Энтропийные условия:

$$\boldsymbol{N} \equiv (\chi_l, -\gamma_l); \boldsymbol{u}^+ \cdot N < \boldsymbol{U} \cdot N < \boldsymbol{u}^- \cdot N.$$

Введем автомодельные переменные:

$$\boldsymbol{X} = (X, Y); \boldsymbol{\chi} = t\boldsymbol{X}(l/t), P_t = tm(l/t).$$

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

ТЕОРЕМА. Для любых кусочно постоянных начальных данных $\boldsymbol{u}_i, \rho_i \geq 0, i = 1,2,3,4$ решение задачи Римана имеет вид:

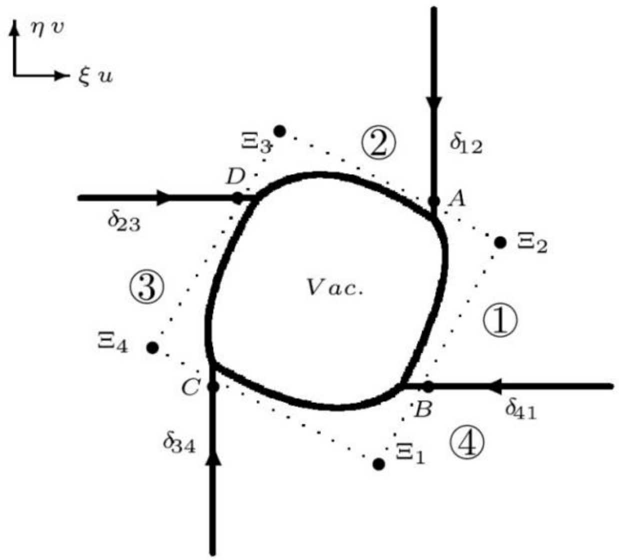


Fig. 4.3. The solution for Case 4.2(i).

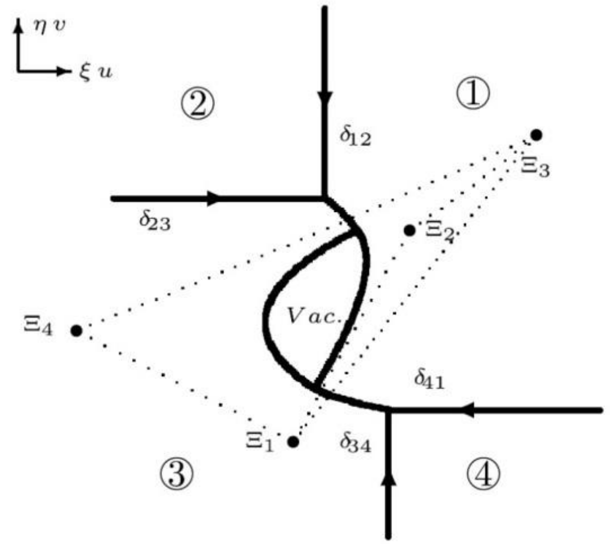


Fig. 4.6. The solution for Case 4.2(iii)b.

1. Li J., Zhang T., Yang S. L. The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics. London.: Longman, 1998.

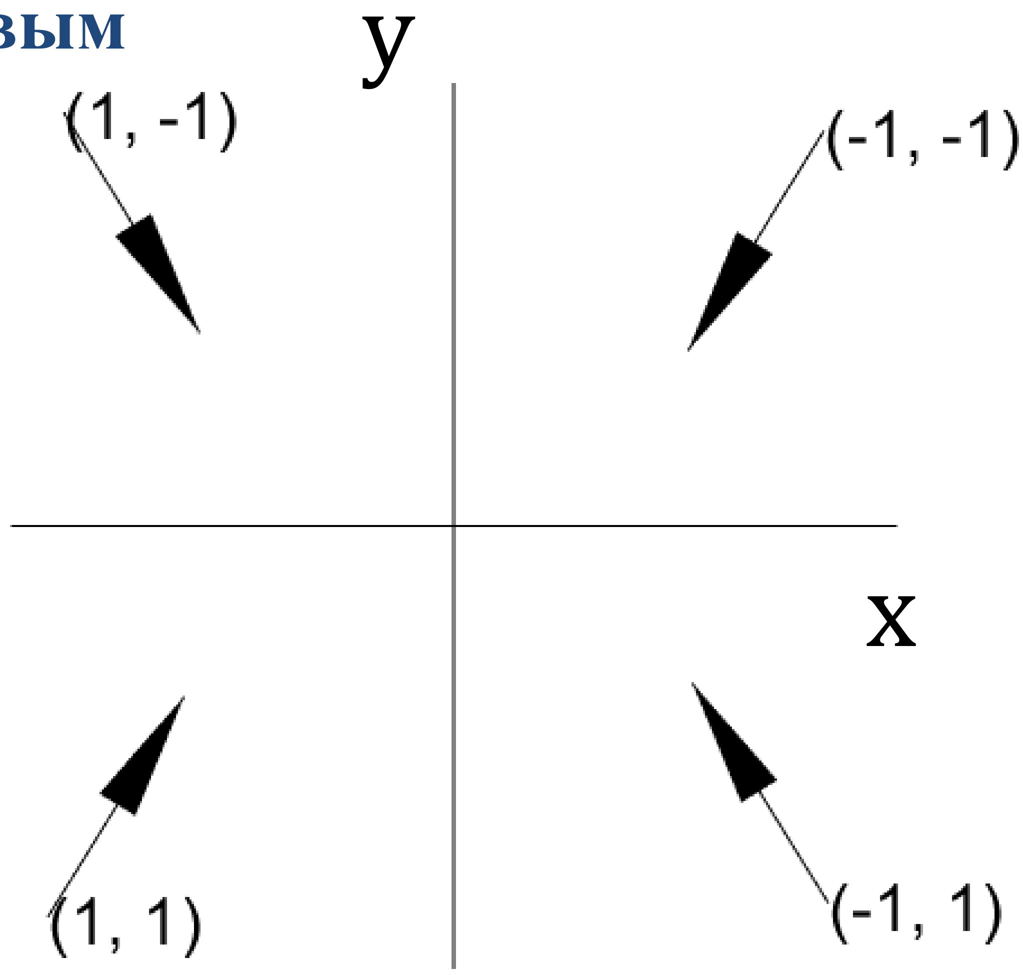
2. Y. Pang, The Riemann problem for two-dimensional zero-pressure Euler equations // J. Math. Anal. Appl. 472, 2 (2019).

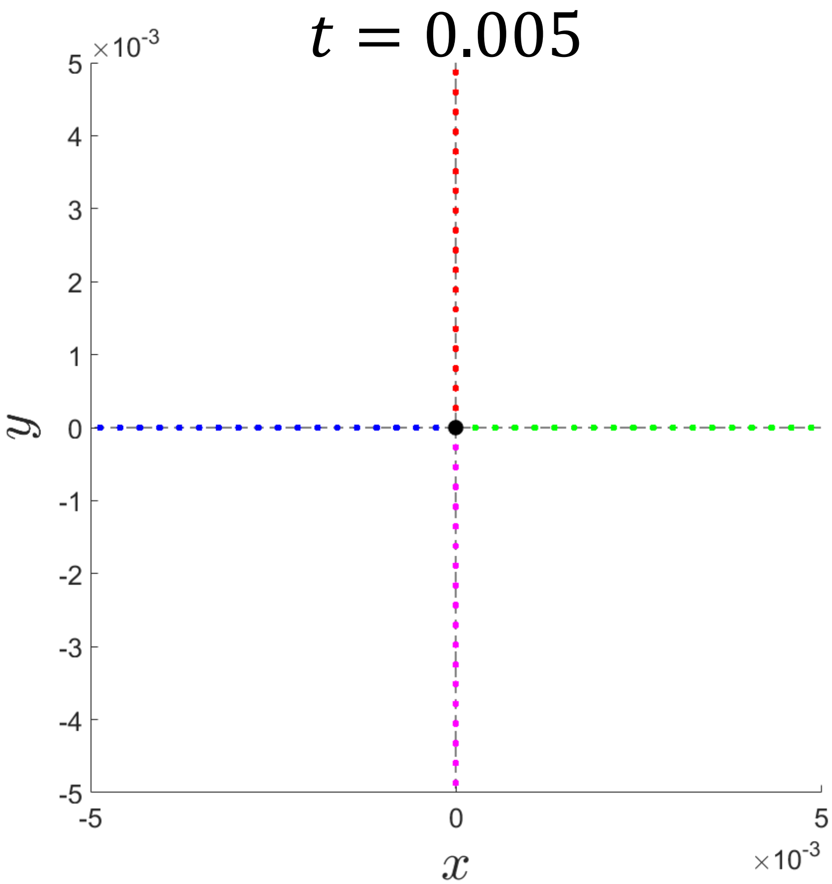
Возможна и «тяжелая» точка. 3. А.И. Аптекарев, Ю.Г. Рыков. Возникновение иерархии особенностей в средах без собственного перепада давления. Двумерный случай // Математические заметки, т. **112**, вып. 4 (2022), 486 – 499

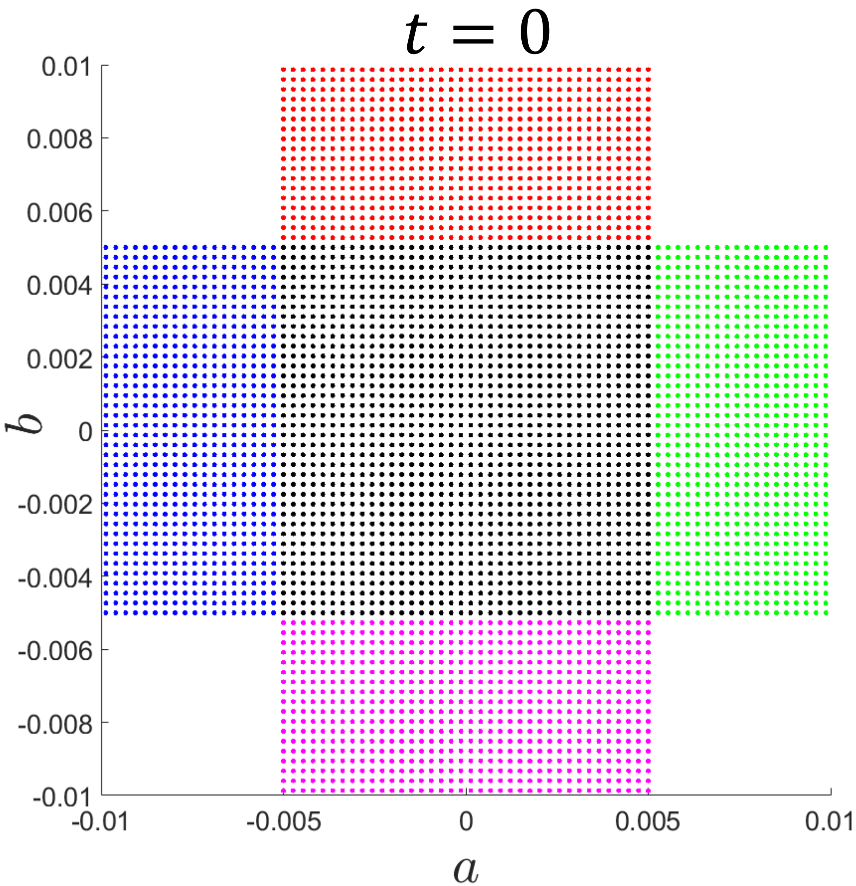
СУЩЕСТВОВАНИЕ ИЕРАРХИИ ОСОБЕННОСТЕЙ, ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

ЭКСПЕРИМЕНТ 1

Расчеты выполнены Н.В. Клюшневым

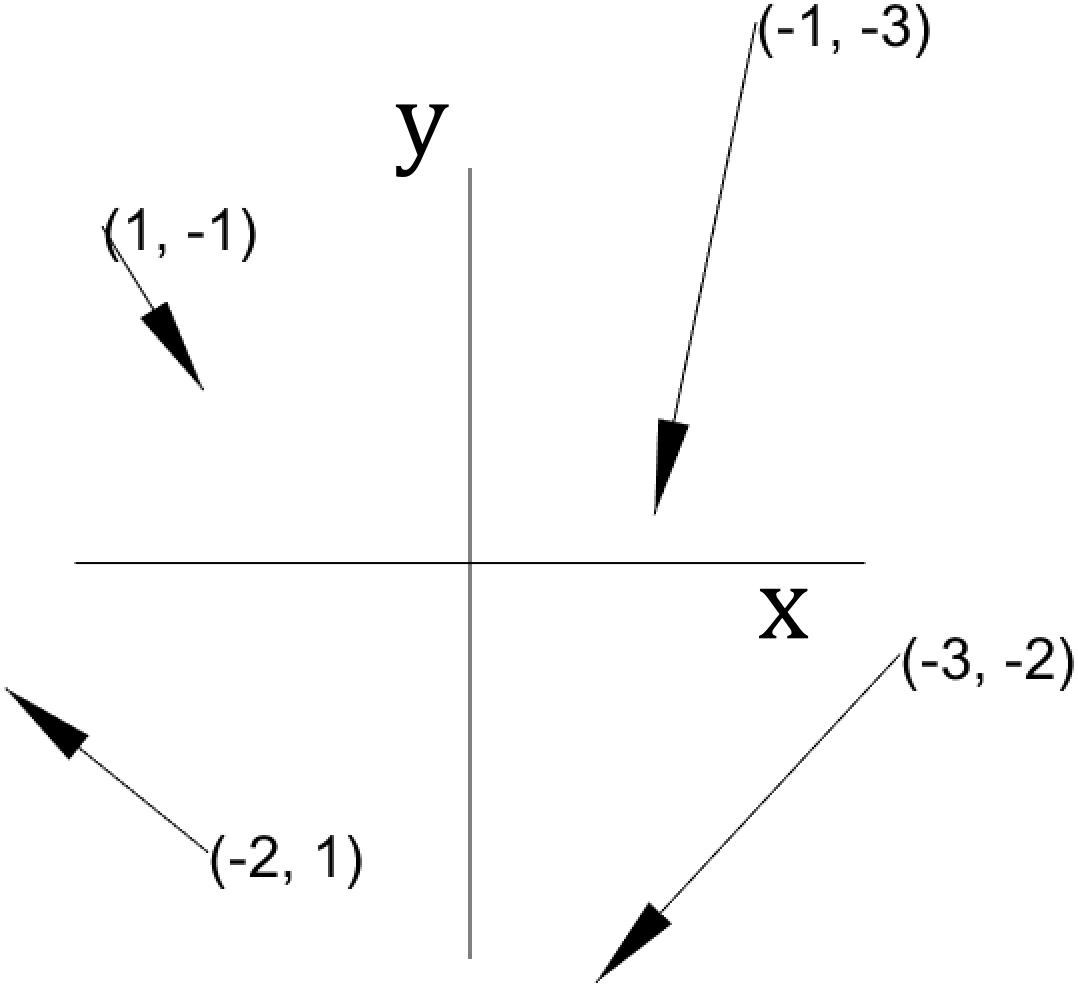




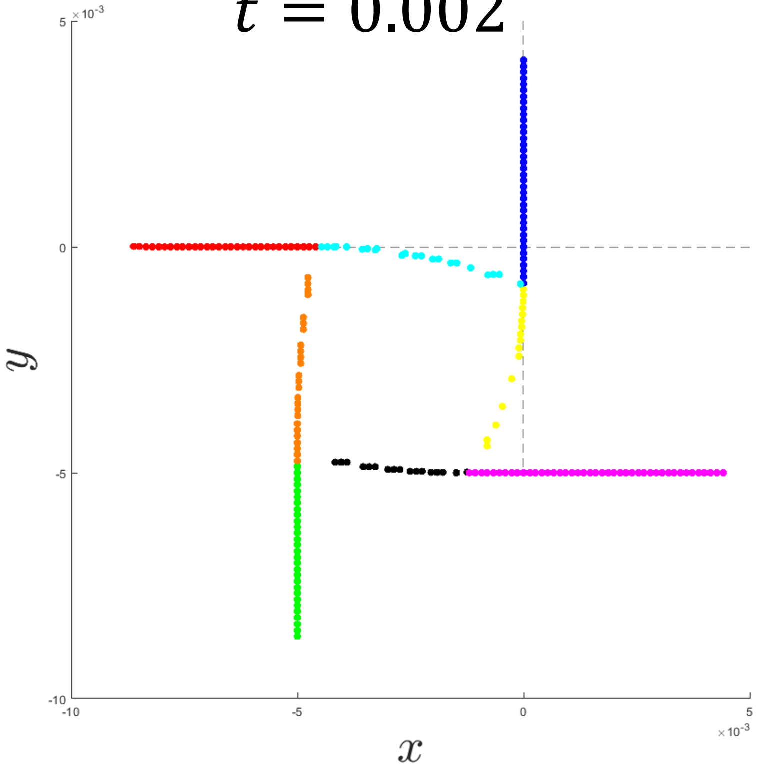


N	M_h	ρ_{12}	ρ_{23}
75	9.47×10^{-5}	9.73×10^{-3}	9.73×10^{-3}
150	9.74×10^{-5}	9.87×10^{-3}	9.87×10^{-3}
299	9.87×10^{-5}	9.93×10^{-3}	9.93×10^{-3}
Теория	1×10^{-4}	1×10^{-2}	1×10^{-2}

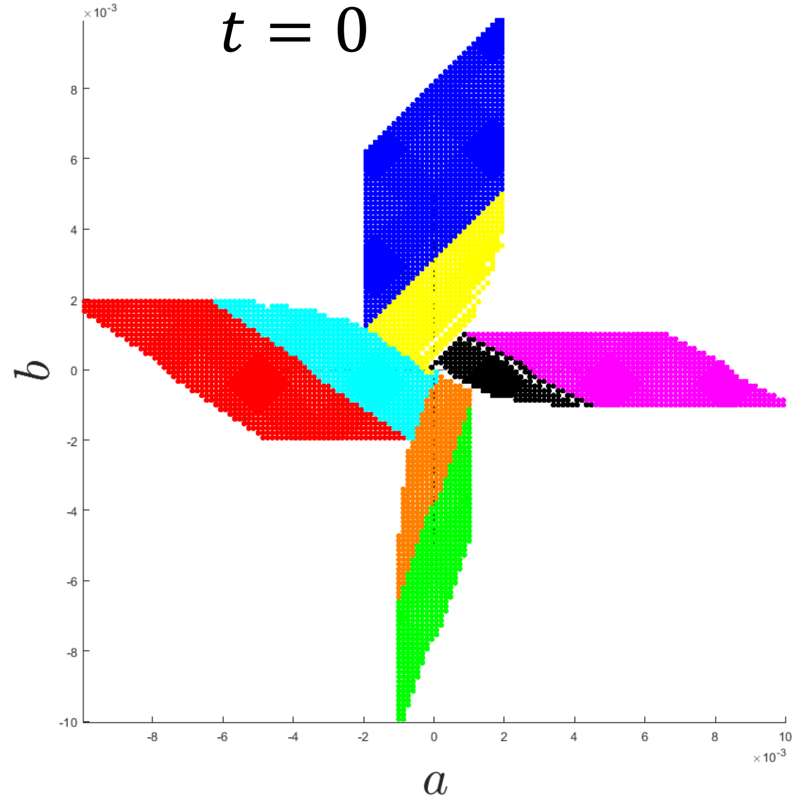
ЭКСПЕРИМЕНТ 3



$t = 0.002$



$t = 0$



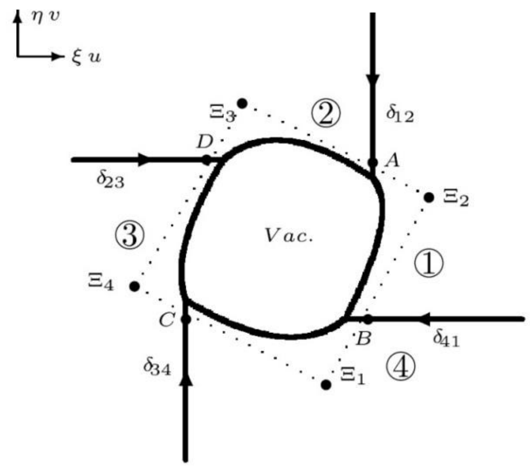
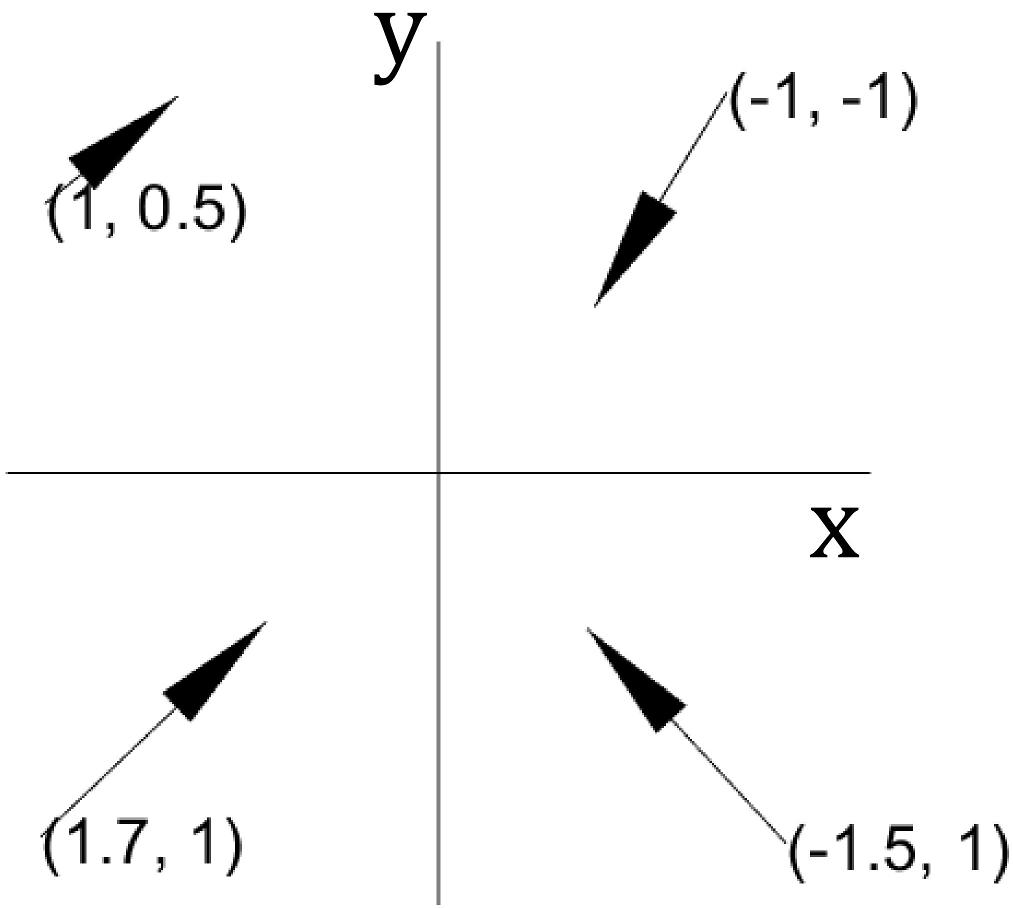


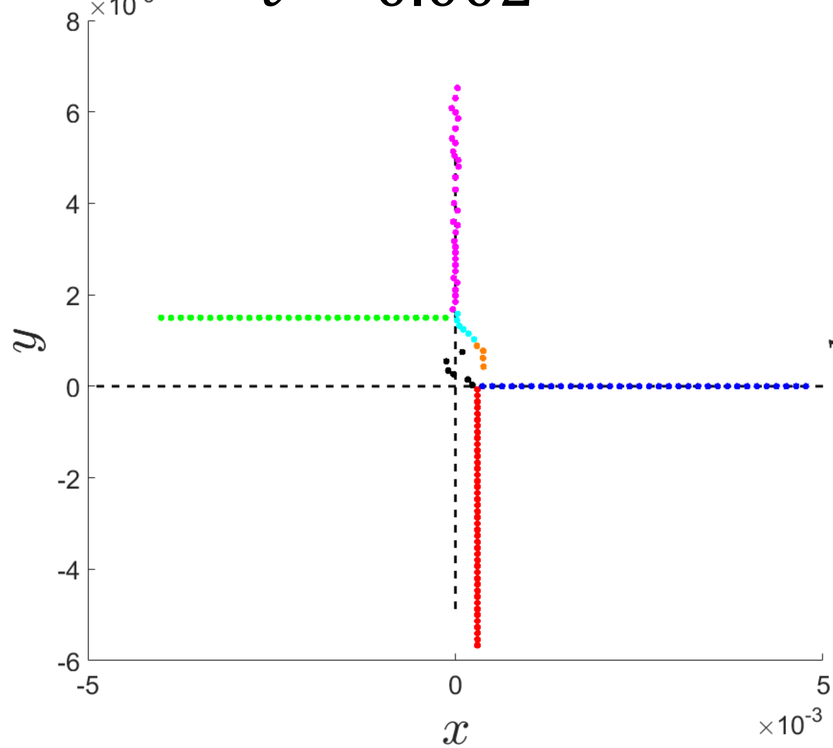
Fig. 4.3. The solution for Case 4.2(i).

ang, The Riemann problem for two-dimensional zero-pressure Euler equations // J. Math. Anal. Appl. 472, 2 (2019).

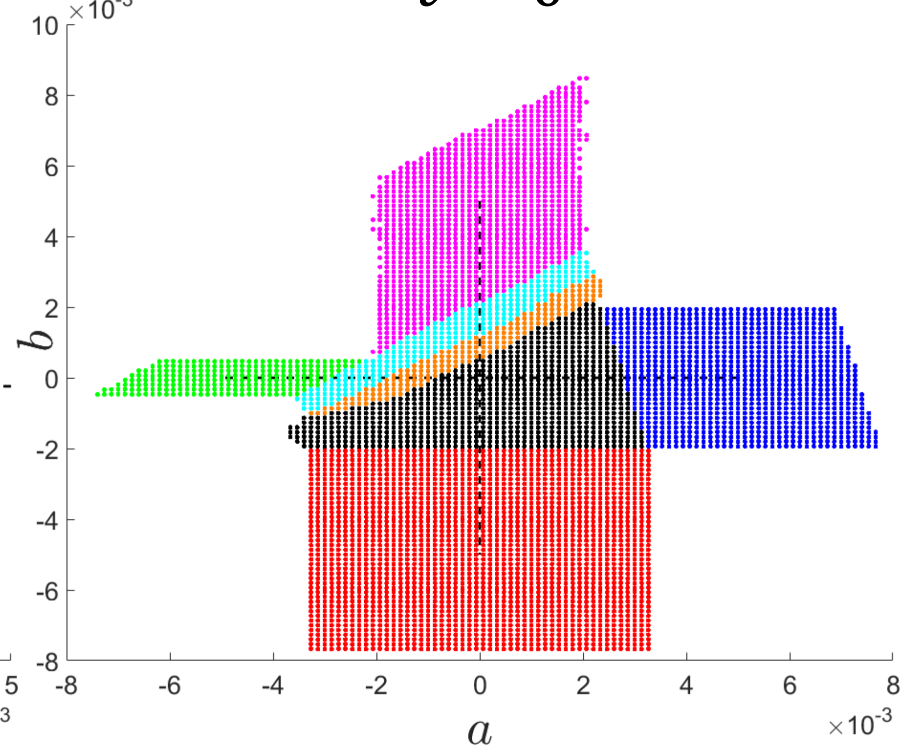
ЭКСПЕРИМЕНТ 4



$t = 0.002$



$t = 0$



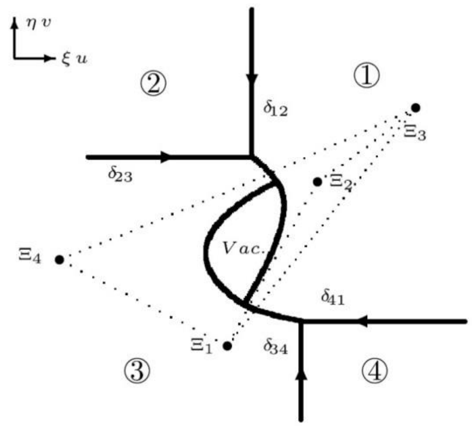
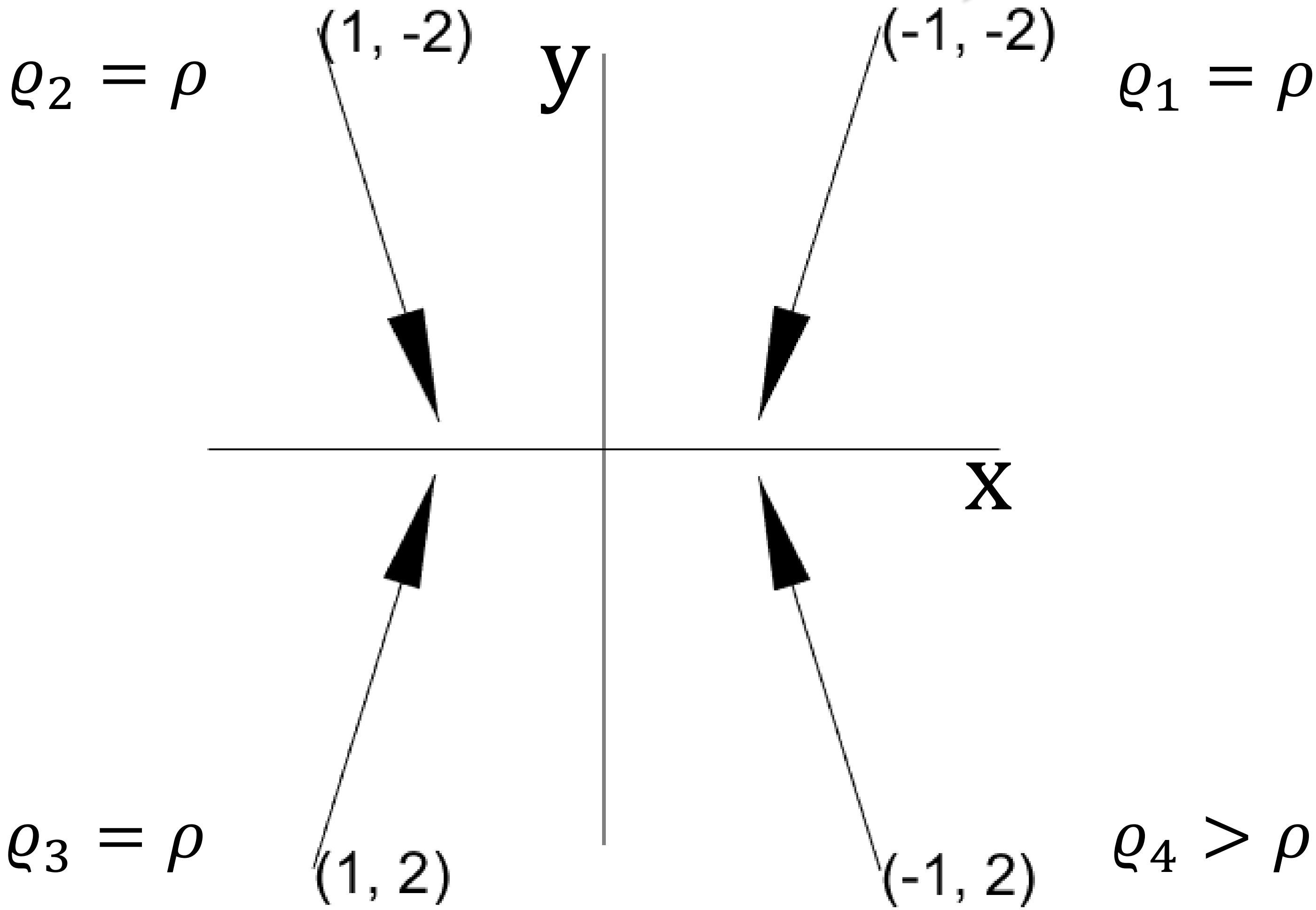


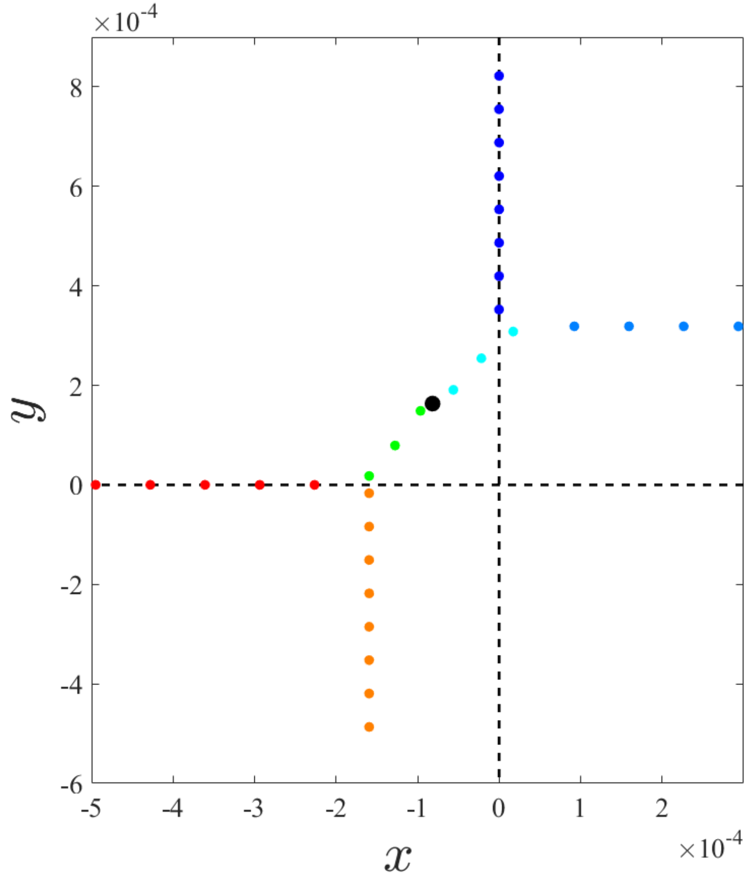
Fig. 4.6. The solution for Case 4.2(iii)b.

…ang, The Riemann problem for two-dimensional zero-pressure Euler equations // J. Math. Anal. Appl. 472, 2 (2019).

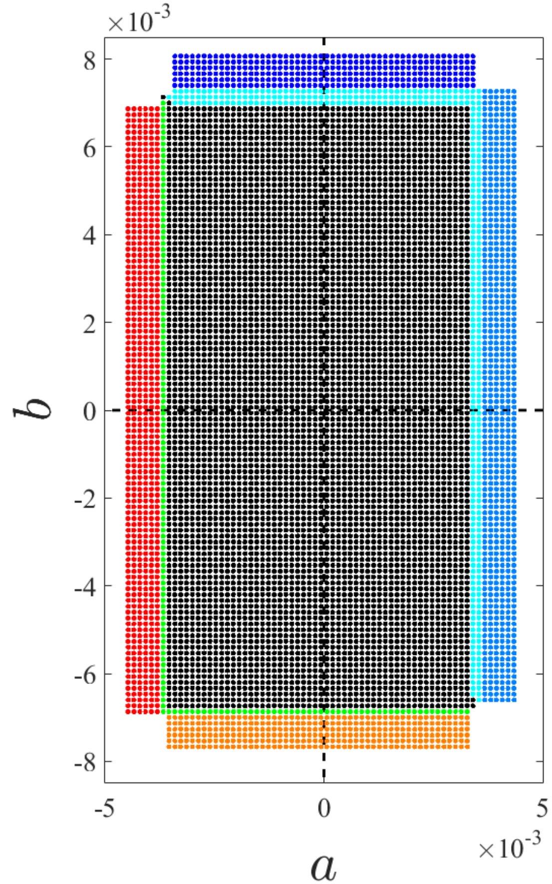
ЭКСПЕРИМЕНТ 5 (ДИНАМИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ)



$t = 0.0035$



$t = 0$



N	M_h	$\Im_h^x$	$\Im_h^y$	M_1	$\Im_1^x$	$\Im_1^y$	M_2	$\Im_2^x$	$\Im_2^y$
150	9.983	-0.08782	0.7232	0.2880	0.1813	0.1991	0.6805	-0.3996	-0.5163
299	9.781	-0.2633	0.4330	0.5324	0.2622	0.5063	0.5380	-0.3029	-0.4339
Теория	9.805	-0.2282	0.4565	0.4626	0.2070	0.4788	0.4626	-0.2394	-0.4139

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В АСТРОФИЗИКЕ – КРУПНОМАСШТАБНАЯ СТРУКТУРА ВСЕЛЕННОЙ

ЭКСПЕРИМЕНТ 6
СЛУЧАЙНОЕ НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

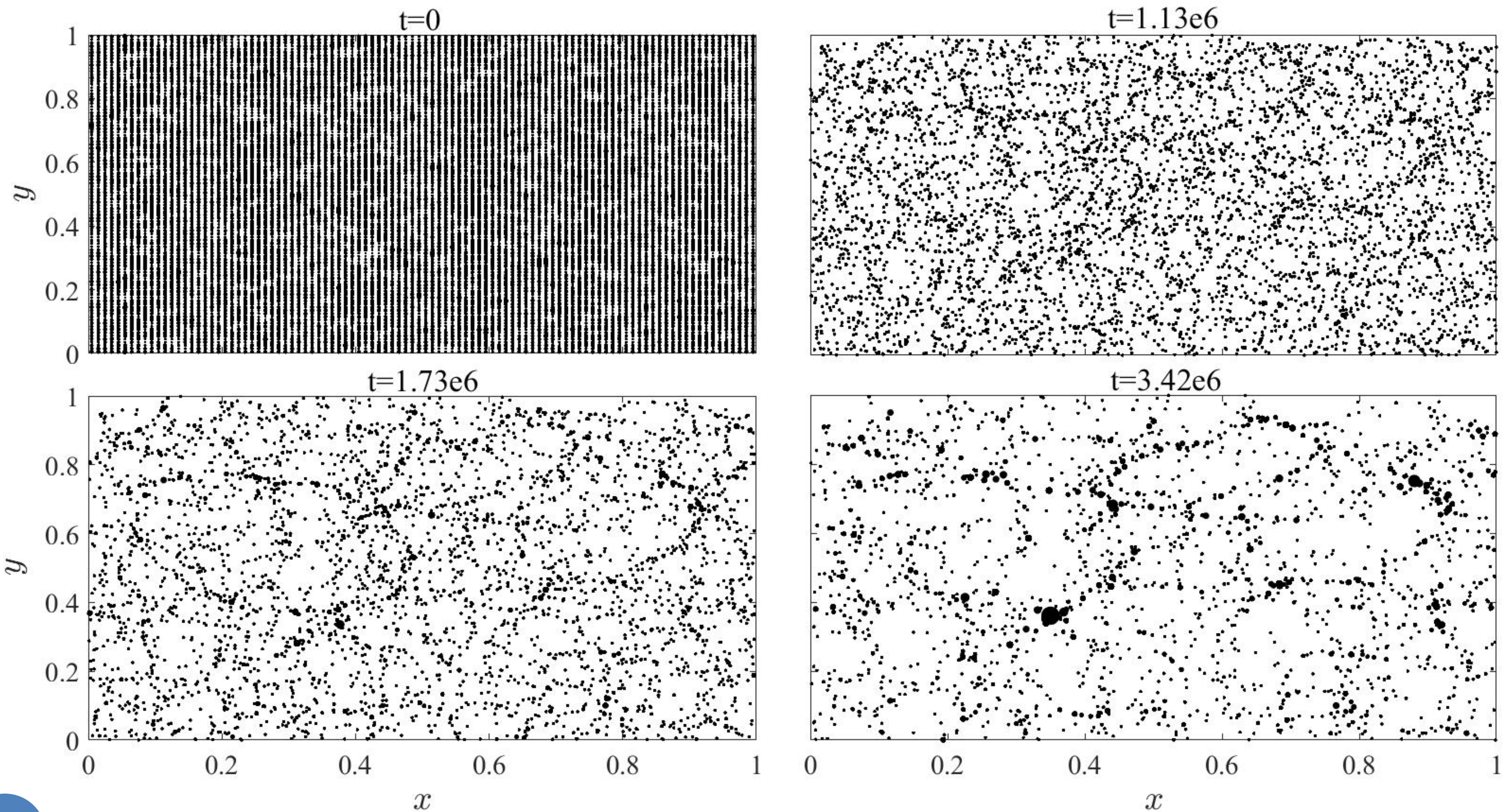
$$\varrho = N(1,0.3),$$

$$(u, v, \varrho):$$

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \varrho dxdy,$$

$$\begin{cases} u = -\phi_x, \\ v = -\phi_y, \\ \Delta\phi = 4\pi G(\varrho - \bar{\varrho}) \end{cases}$$

ЭКСПЕРИМЕНТ 6
СЛУЧАЙНОЕ НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ



ОРДЕНА ЛЕНИНА
им. М.В. КЕЛДЫША
РАН

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ