О локально ограниченных решениях одномерных законов сохранения с несимметричной функцией потока

Лидия Гаргянц

gargyants@bmstu.ru

ВТОРАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕНТРОВ РОССИИ

10 ноября 2022

Постановка задачи

Для заданных функций $f \in C^1(\mathbb{R})$ и u_0 рассмотрим в полосе $\Pi_T = \{(t,\ x) \mid t \in (0,\ T),\ x \in \mathbb{R}\}$, $0 < T \leqslant \infty$, задачу Коши:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Теорема [(С.Н. Кружков)].

Для произвольной начальной функции $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ существует единственное обобщенное энтропийное решение $u \in L^\infty(\Pi_T)$ задачи (1), (2).

Обобщенные энтропийные решения

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение. [(Кружков, 1970)]

Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ называется *обобщённым энтропийным решением* задачи (1), (2), если:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi \geqslant 0$, выполнено неравенство

$$\int_{\Pi_T} |u-k|\varphi_t + (\mathrm{sign}(u-k)(f(u)-f(k)))\,\varphi_x\,dtdx \geqslant 0;$$

2) $\mathrm{esslim}_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0(\cdot)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Обобщенные энтропийные решения

Предложение.

Пусть $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ — кусочно гладкая в полосе Π_T функция с не более чем счётным числом непересекающихся линий разрыва Γ_n. Тогда u является о.э.р. уравнения (1) в том и только в том случае, когда

- в области гладкости u удовлетворяет (1) в классическом смысле;
- на линиях разрыва выполнены условия Ранкина-Гюгонио и допустимости разрыва.

Обобщенные энтропийные решения

Предложение.

Пусть $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ — кусочно гладкая в полосе Π_T функция с не более чем счётным числом непересекающихся линий разрыва Γ_n. Тогда u является о.э.р. уравнения (1) в том и только в том случае, когда

- в области гладкости u удовлетворяет (1) в классическом смысле;
- на линиях разрыва выполнены условия Ранкина-Гюгонио и допустимости разрыва.

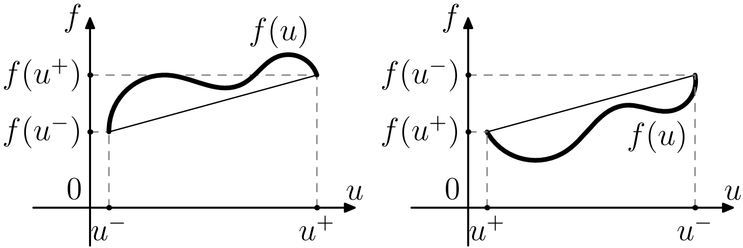
При этом:

- говорят, что на линии разрыва Γ_n, являющейся графиком функции $\gamma_n \in C^1(0, T)$, выполнено *условие Ранкина-Гюгонио*, если для любого $t \in (0, T)$

$$\dot{\gamma}_n(t) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)}; \; u_n^{\pm}(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)\pm 0)} u(\tau,\xi);$$

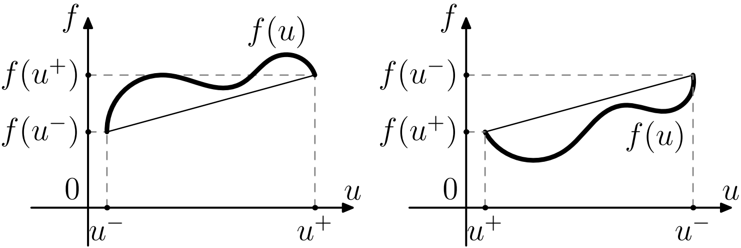
Обобщенные энтропийные решения

- **Условие допустимости разрыва:**



Обобщенные энтропийные решения

- **Условие допустимости разрыва:**

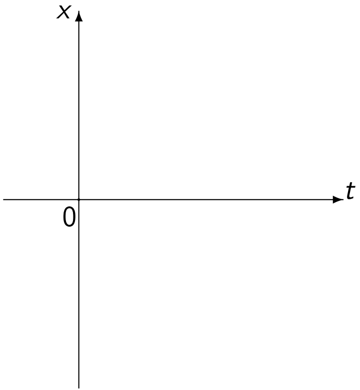


Олейник О.А., О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения, УМН, 1959, т. 14, № 2, с. 165–170.

Кружков С.Н., Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка, Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 1, с. 29–32.

Кружков С.Н., Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными, Матем. сб., 1970, т. 81, № 2, с. 228–255.

Степенная функция потока и линейное начальное условие

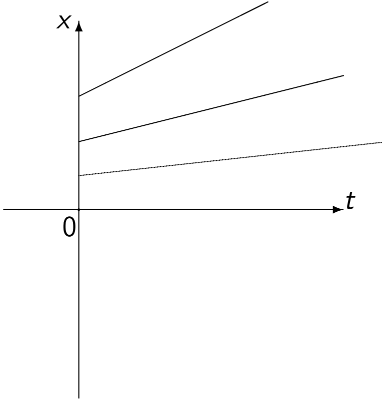


$$
\begin{aligned}
u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0,\\
u\Big|_{t=0} &= x.
\end{aligned}
$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2,\ \dot{u} = 0,\ \dot{t} = 1.$$

Степенная функция потока и линейное начальное условие

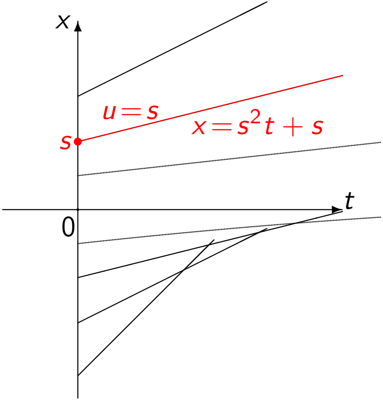


$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0, \\ u\Big|_{t=0} &= x. \end{aligned}$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2, \; \dot{u} = 0, \; \dot{t} = 1.$$

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = x.$$

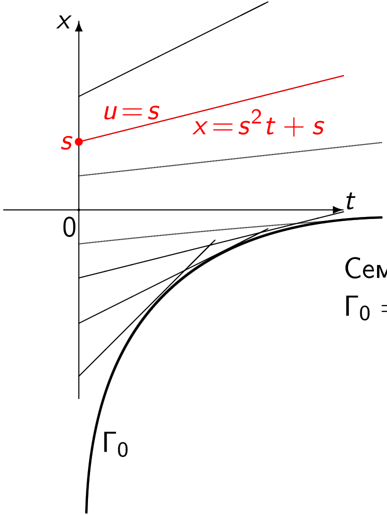
Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2, \ \dot{u} = 0, \ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0, \\ u\Big|_{t=0} &= x. \end{aligned}$$

Характеристическая система

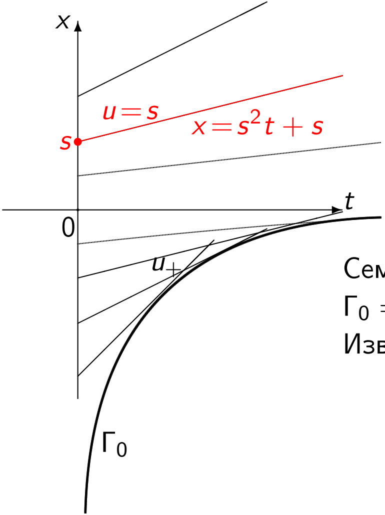
$$\dot{x} = u^2, \ \ \dot{u} = 0, \ \ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = x.$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2,\ \ \dot{u} = 0,\ \ \dot{t} = 1.$$

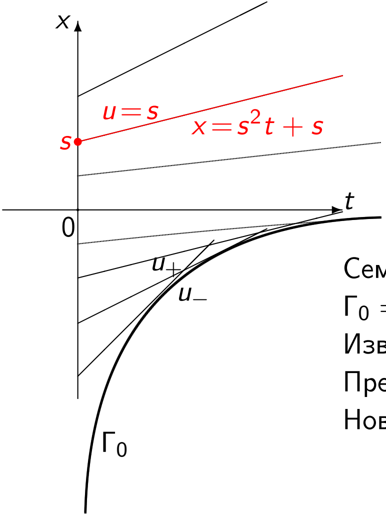
Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0, \\ u\big|_{t=0} &= x. \end{aligned}$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2, \ \ \dot{u} = 0, \ \ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

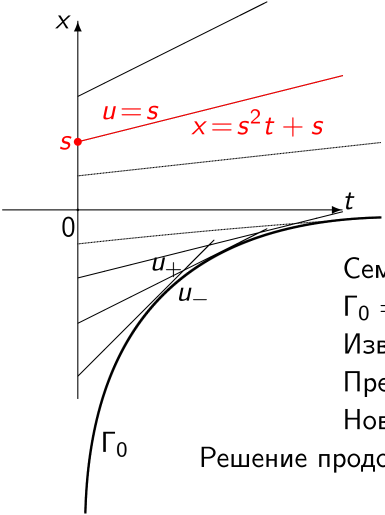
Семейство прямых имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$
\begin{aligned}
u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0,\\
u\Big|_{t=0} &= x.
\end{aligned}
$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2,\ \dot{u} = 0,\ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую

$\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

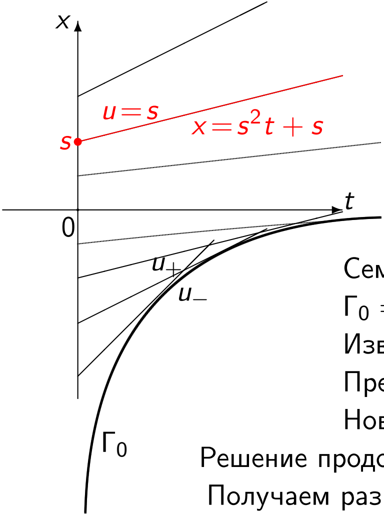
Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Решение продолжается в область $xt < -1/4$ по индукции.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0,\qquad u\Big|_{t=0} = x.$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2,\ \dot{u} = 0,\ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую

$\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

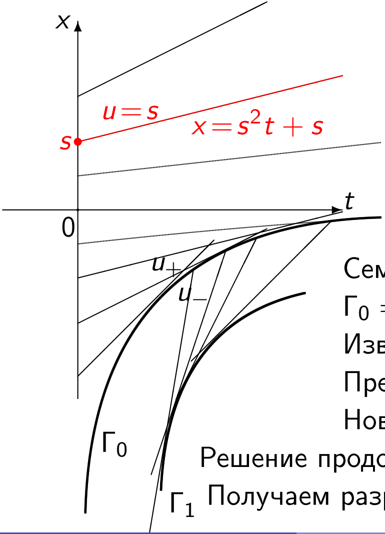
Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\Big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Решение продолжается в область $xt < -1/4$ по индукции.

Получаем разрывное решение в полуплоскости $t > 0$.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$
\begin{aligned}
u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0,\\
u\Big|_{t=0} &= x.
\end{aligned}
$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2,\ \dot{u} = 0,\ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

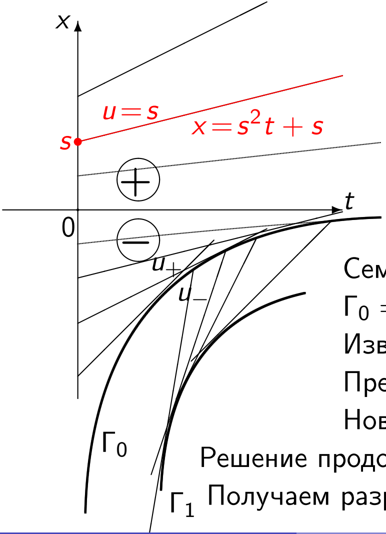
Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\Big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Решение продолжается в область $xt < -1/4$ по индукции.

Получаем разрывное решение в полуплоскости $t > 0$.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$
\begin{aligned}
u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0,\\
u\Big|_{t=0} &= x.
\end{aligned}
$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2,\ \ \dot{u} = 0,\ \ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую

$\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

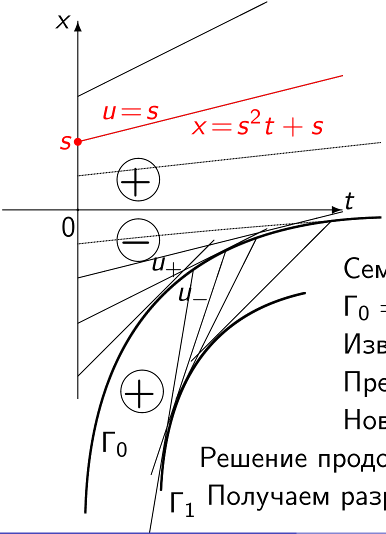
Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\Big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Решение продолжается в область $xt < -1/4$ по индукции.

Получаем разрывное решение в полуплоскости $t > 0$.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$
\begin{aligned}
u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0, \\
u\Big|_{t=0} &= x.
\end{aligned}
$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2, \ \dot{u} = 0, \ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

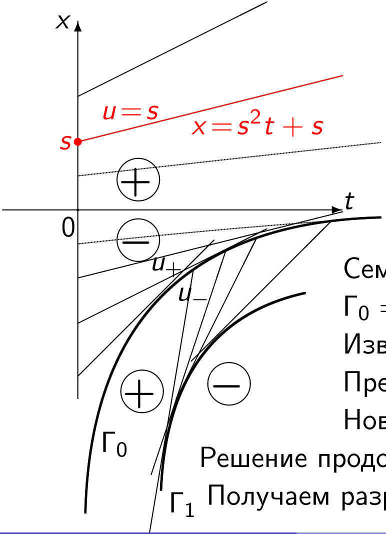
Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Решение продолжается в область $xt < -1/4$ по индукции.

Получаем разрывное решение в полуплоскости $t > 0$.

Степенная функция потока и линейное начальное условие



$$
\begin{aligned}
u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x &= 0, \\
u\Big|_{t=0} &= x.
\end{aligned}
$$

Характеристическая система

$$\dot{x} = u^2, \ \ \dot{u} = 0, \ \ \dot{t} = 1.$$

Характеристиками являются прямые

$$x = s^2 t + s.$$

Семейство прямых имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$.

Известен предел u_+ при подходе к кривой Γ_0.

Предел u_- находится из условия Гюгонио.

Новое «начальное» условие $u\big|_{\Gamma_0} = u_-$.

Решение продолжается в область $xt < -1/4$ по индукции.

Получаем разрывное решение в полуплоскости $t > 0$.

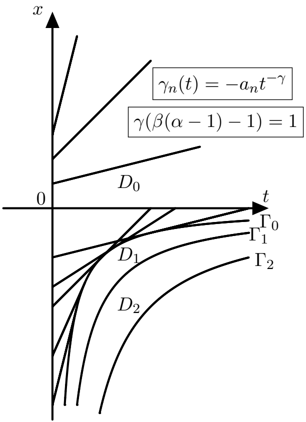
Неограниченные о.э.р. (1), (2) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u,\ \alpha > 1,$ изучались в работах А. Ю. Горицкого и Е. Ю. Панова в случае начальных условий степенного вида $u_0(x) = |x|^{\beta},\ \beta(\alpha - 1) > 1,$ и в работах Л. В. Гаргянц в случае экспоненциального начального условия $u_0(x) = e^{-x}.$

Неограниченные о.э.р. (1), (2) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u$, $\alpha > 1$, изучались в работах А. Ю. Горицкого и Е. Ю. Панова в случае начальных условий степенного вида $u_0(x) = |x|^{\beta}$, $\beta(\alpha - 1) > 1$, и в работах Л. В. Гаргянц в случае экспоненциального начального условия $u_0(x) = e^{-x}$.

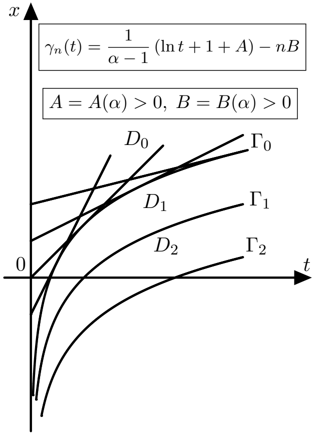
Все построенные решения имеют одинаковую структуру.

- Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими непересекающимися кривыми Γ_n на счетное число областей.
- В областях между этими кривыми решение является классическима линия сильного разрыва Γ_n формируется как огибающая семейства характеристик.
- Между двумя соседними линиями разрыва функция $u(t, x)$ является либо положительной, либо отрицательной, меняя знак при переходе через каждый разрыв.

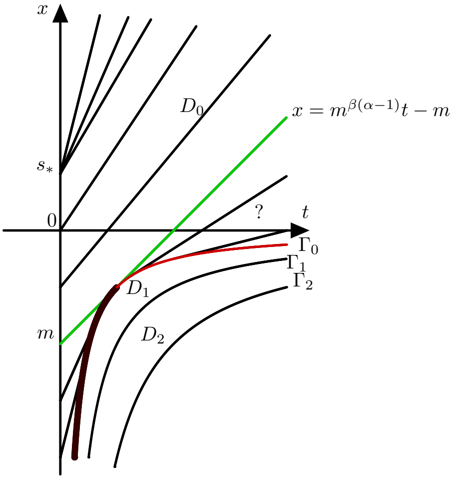
Степенная функция потока и неограниченные начальные условия



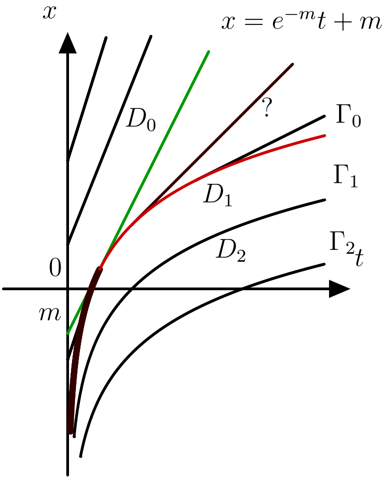
Характеристики и линии разрыва. Степенное начальное условие



Характеристики и линии разрыва. Экспоненциальное начальное условие



$$u_0(x) = \begin{cases} |x|^{\beta}, & x < m \leqslant 0, \\ \tilde{u}_0(x), & x \geqslant m. \end{cases}$$



$$u_0(x) = \begin{cases} e^{-x/(\alpha-1)}, & x < m, \\ \tilde{u}_0(x), & x \geqslant m. \end{cases}$$

Принципиальное отличие от ранее построенных примеров заключается в том, что ударная волна Γ_0 образована как огибающая семейства характеристик, идущих из начальной плоскости $t = 0$, лишь при $t \leqslant t_0 < +\infty$. Кроме того, в области D_0 решение является непрерывным, но, вообще говоря, не гладким.

Принципиальное отличие от ранее построенных примеров заключается в том, что ударная волна Γ_0 образована как огибающая семейства характеристик, идущих из начальной плоскости $t = 0$, лишь при $t \leqslant t_0 < +\infty$. Кроме того, в области D_0 решение является непрерывным, но, вообще говоря, не гладким.

Горицкий А. Ю., Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счетным числом ударных волн, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1999, №2, 3–6.

Горицкий А. Ю., Панов Е. Ю. О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, Тр.МИАН, 2002, т. 236, с. 120–133.

Гаргянц Л. В., Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения, Дифференц. уравнения, 2016, т. 52, № 4, с. 481–489.

Гаргянц Л.В., О задаче Коши для одномерного закона сохранения с начальными условиями, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на минус бесконечности, Дифференц. уравнения, 2022, т. 58, № 3, с. 304–313.

Группы симметрии

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1} u}{\alpha} \right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Группы симметрии

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1} u}{\alpha} \right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Задача I. $u\Big|_{t=0} = a|x|^{\beta}, \quad \beta(\alpha - 1) > 1$

инвариантна относительно замены

$$x \to h \cdot x, \quad u \to h^{\beta} \cdot u, \quad t \to h^{1-\beta(\alpha-1)} \cdot t$$

$$u = U(t,x) \quad \longrightarrow \quad u = h^{-\beta} U(h^{1-\beta(\alpha-1)} t, hx)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u = t^{-\beta\gamma} v(xt^{\gamma})} \quad \gamma = (\beta(\alpha-1) - 1)^{-1} > 0$$

Группы симметрии

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Задача I. $\quad u\big|_{t=0} = a|x|^{\beta}, \quad \beta(\alpha-1) > 1$

инвариантна относительно замены

$$x \to h\cdot x, \quad u \to h^{\beta}\cdot u, \quad t \to h^{1-\beta(\alpha-1)}\cdot t$$

$$u = U(t,x) \quad \longrightarrow \quad u = h^{-\beta}U(h^{1-\beta(\alpha-1)}t, hx)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u = t^{-\beta\gamma}v(xt^{\gamma})} \quad \gamma = (\beta(\alpha-1)-1)^{-1} > 0$$

Задача II. $\quad u\big|_{t=0} = a\,e^{-x/(\alpha-1)}$

инвариантна относительно замены

$$x \to x+h, \quad u \to u\cdot e^{-h/(\alpha-1)}, \quad t \to t\cdot e^{h}.$$

$$u = U(t,x) \quad \longrightarrow \quad u = e^{h/(\alpha-1)}U(e^{h}t, x+h)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u = t^{-1/(\alpha-1)}v(x-\ln t)}$$

Гладкие решения специального вида

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Мы ищем гладкие решения специального вида:

$$u = t^{-\beta\gamma} v(xt^{\gamma}) \quad \text{или} \quad u = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t).$$

Гладкие решения специального вида

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Мы ищем гладкие решения специального вида:

$$u = t^{-\beta\gamma}v(xt^{\gamma}) \quad \text{или} \quad u = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t).$$

ОДУ для $v(\xi)$:

Задача I. $v' \cdot \left(\xi + \gamma^{-1}|v|^{\alpha-1}\right) = \beta v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - C \cdot |v|^{1/\beta}.$$

Гладкие решения специального вида

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Мы ищем гладкие решения специального вида:

$$u = t^{-\beta\gamma} v(xt^{\gamma}) \quad \text{или} \quad u = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t).$$

ОДУ для $v(\xi)$:

Задача I. $v' \cdot \left(\xi + \gamma^{-1}|v|^{\alpha-1}\right) = \beta v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - C \cdot |v|^{1/\beta}.$$

Задача II. $(\alpha - 1)\left(|v|^{\alpha-1} - 1\right) \cdot v' = v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\ln|v| + C.$$

Гладкие решения специального вида

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Мы ищем гладкие решения специального вида:

$$u = t^{-\beta\gamma} v(xt^{\gamma}) \quad \text{или} \quad u = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t).$$

ОДУ для $v(\xi)$:

Задача I. $v' \cdot \left(\xi + \gamma^{-1}|v|^{\alpha-1}\right) = \beta v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - C \cdot |v|^{1/\beta}.$$

Задача II. $(\alpha - 1)\left(|v|^{\alpha-1} - 1\right) \cdot v' = v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - (\alpha-1)\ln|v| + C.$$

Гладкие решения не определены при $\xi \to -\infty$.

Гладкие решения специального вида

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1.$$

Мы ищем гладкие решения специального вида:

$$u = t^{-\beta\gamma} v(xt^{\gamma}) \quad \text{или} \quad u = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t).$$

ОДУ для $v(\xi)$:

Задача I. $v' \cdot \left(\xi + \gamma^{-1}|v|^{\alpha-1}\right) = \beta v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - C \cdot |v|^{1/\beta}.$$

Задача II. $(\alpha - 1)\left(|v|^{\alpha-1} - 1\right) \cdot v' = v$

$$\Longrightarrow \quad \xi = |v|^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\ln|v| + C.$$

Гладкие решения не определены при $\xi \to -\infty$.

Условия на разрывах:

Задача I. $-\gamma\eta = \frac{f(v_+)-f(v_-)}{v_+-v_-}$ на $xt^{\gamma} = \eta$.

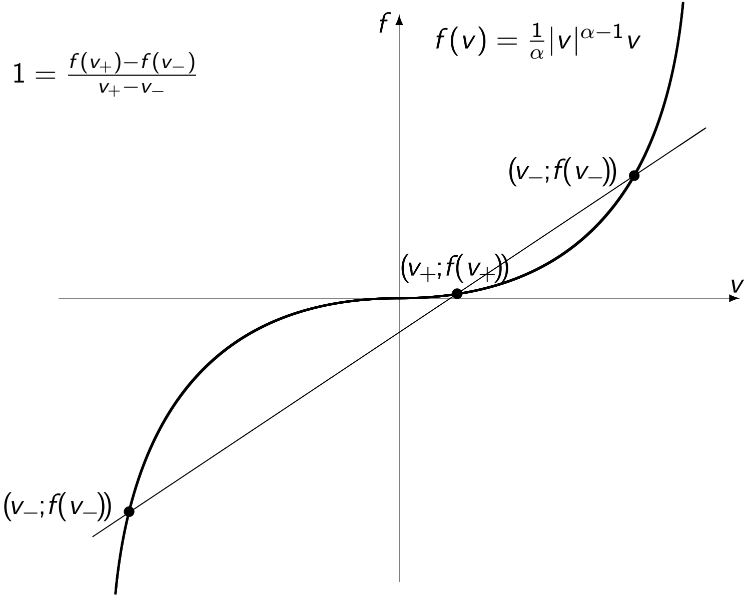
Задача II. $1 = \frac{f(v_+)-f(v_-)}{v_+-v_-}$ на $x - \ln t = \eta$.

Условия на разрывах

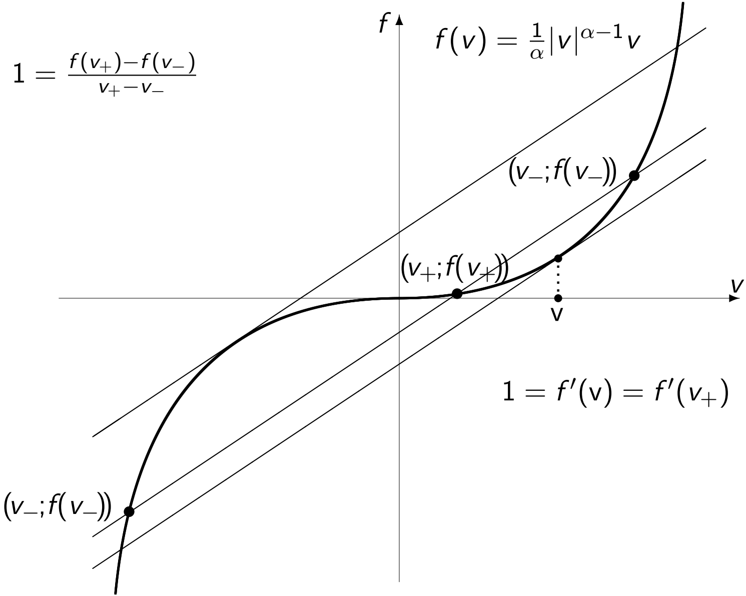
$$1 = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-}$$

Условия на разрывах

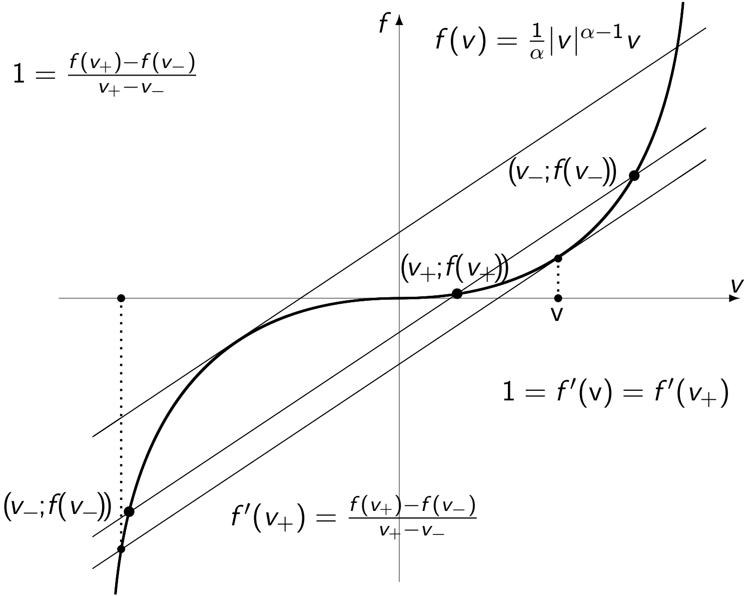
$$1 = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-}$$



Условия на разрывах



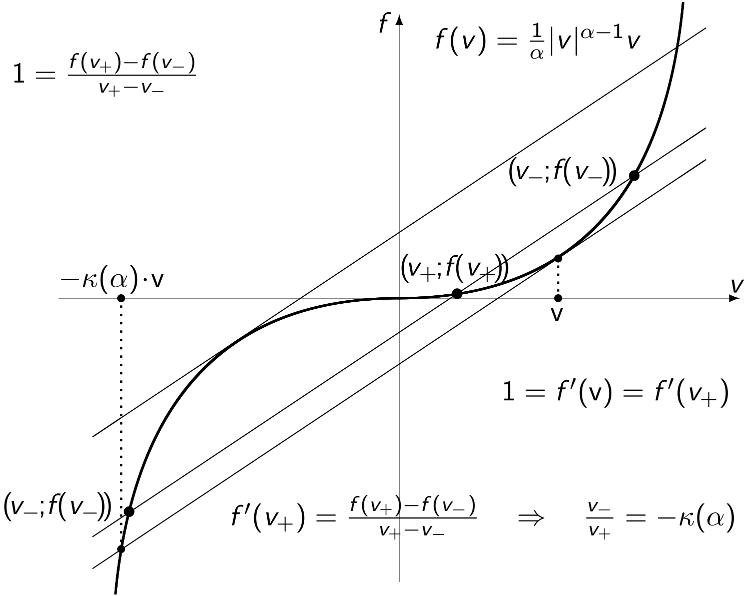
Условия на разрывах



Условия на разрывах

$$1 = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-}$$

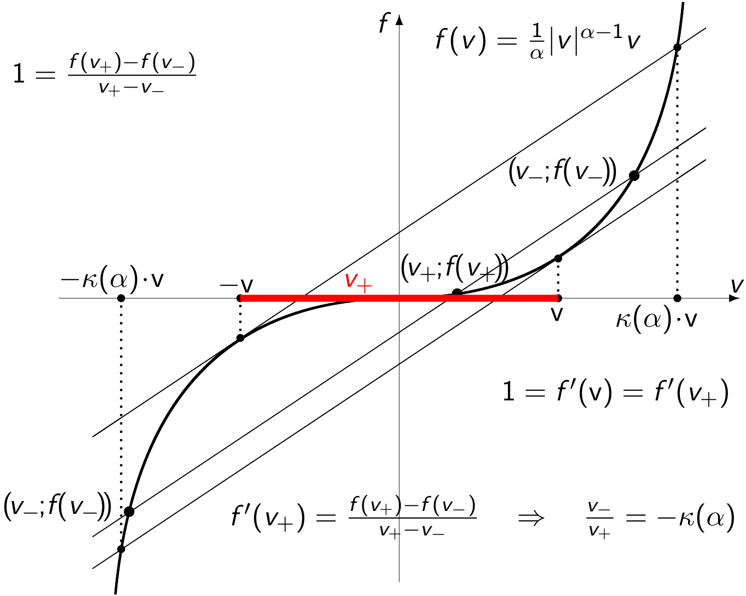
$$f(v) = \frac{1}{\alpha}|v|^{\alpha-1}v$$



$$1 = f'(\mathrm{v}) = f'(v_+)$$

$$f'(v_+) = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_-}{v_+} = -\kappa(\alpha)$$

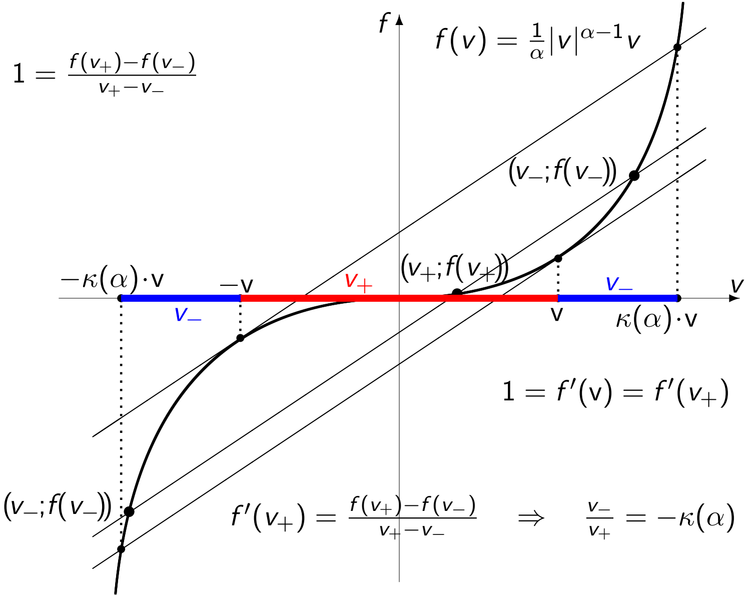
Условия на разрывах



Условия на разрывах

$$1 = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-}$$

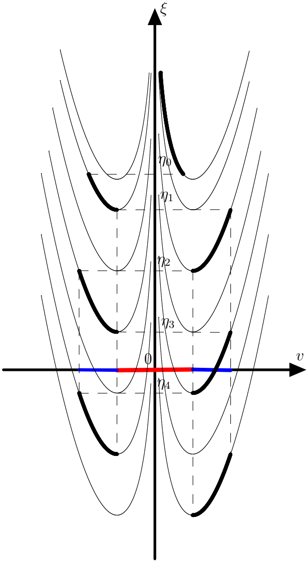
$$f(v) = \frac{1}{\alpha}|v|^{\alpha-1}v$$



$$1 = f'(\mathrm{v}) = f'(v_+)$$

$$f'(v_+) = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_-}{v_+} = -\kappa(\alpha)$$

Построение разрывных решений



$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \quad \alpha > 1,$$

$$(\alpha-1)\left(|v|^{\alpha-1}-1\right)\cdot v' = v,$$

$$\xi = |v|^{\alpha-1} - (\alpha-1)\ln|v| + C.$$

Задача II — основная теорема

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = a\,e^{-x/(\alpha-1)}.$$

Теорема.

Кусочно гладкие решения вида $u = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t)$ определяются формулой

$$u = \begin{cases} \operatorname{sign} a \cdot t^{-1/(\alpha-1)} W(x - \ln t - (\alpha-1)\ln|a|), \\ \qquad\qquad x > \ln t + \eta_0, \\ (-1)^{k+\sigma} \cdot t^{-1/(\alpha-1)} W(x - \ln t - \eta_k + 1), \\ \qquad\qquad \ln t + \eta_k < x < \ln t + \eta_{k-1} \end{cases}$$

- $\eta_0 > \eta_1 > \eta_2 > \ldots \to -\infty$,

Задача II — основная теорема

$$u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha-1}u}{\alpha}\right)_x = 0, \qquad u\big|_{t=0} = a\,e^{-x/(\alpha-1)}.$$

Теорема.

Кусочно гладкие решения вида $u = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t)$ определяются формулой

$$u = \begin{cases} \operatorname{sign} a \cdot t^{-1/(\alpha-1)}W(x - \ln t - (\alpha-1)\ln|a|), \\ \qquad\qquad x > \ln t + \eta_0, \\ (-1)^{k+\sigma}\cdot t^{-1/(\alpha-1)}W(x - \ln t - \eta_k + 1), \\ \qquad\qquad \ln t + \eta_k < x < \ln t + \eta_{k-1} \end{cases}$$

- $\eta_0 > \eta_1 > \eta_2 > \ldots \to -\infty$,
  при этом есть свобода выбора η_0, остальные η_k определяются однозначно и образуют арифметическую прогрессию;
- $v = W(\xi)$ — обратная к $\xi = |v|^{\alpha-1} - (\alpha-1)\ln|v|$;
- $\sigma = 0, 1$ — выбирается произвольно.

В случае $a = 0$ выполнено $u(t,x) = 0$ при $x > \ln t + \eta_0$; величины η_0 и $\sigma = 0, 1$ выбираются произвольно.

1. Решения определены во всей полуплоскости $t > 0$ и имеют счетное число линий разрыва вида $x = \ln t + \eta_k$.
2. Между двумя соседними ударными волнами решение сохраняет знак и меняет его при переходе через каждую ударную волну за исключением, быть может, $x = \ln t + \eta_0$.

1. Решения определены во всей полуплоскости $t > 0$ и имеют счетное число линий разрыва вида $x = \ln t + \eta_k$.
2. Между двумя соседними ударными волнами решение сохраняет знак и меняет его при переходе через каждую ударную волну за исключением, быть может, $x = \ln t + \eta_0$.В области $x < \ln t + \eta_0$ решения являются "односторонне периодическими" по x.
3. Решения удовлетворяют оценкам

$$
\begin{aligned}
|u(t,x)| &< t^{-1/(\alpha-1)}, && x > \ln t + \eta_0, \\
t^{-1/(\alpha-1)} \le |u(t,x)| &\le \kappa(\alpha) \cdot t^{-1/(\alpha-1)}, && x < \ln t + \eta_0.
\end{aligned}
$$

1. Решения определены во всей полуплоскости $t > 0$ и имеют счетное число линий разрыва вида $x = \ln t + \eta_k$.
2. Между двумя соседними ударными волнами решение сохраняет знак и меняет его при переходе через каждую ударную волну за исключением, быть может, $x = \ln t + \eta_0$.В области $x < \ln t + \eta_0$ решения являются "односторонне периодическими" по x.
3. Решения удовлетворяют оценкам

$$
\begin{aligned}
|u(t,x)| &< t^{-1/(\alpha-1)}, & x > \ln t + \eta_0,\\
t^{-1/(\alpha-1)} \le |u(t,x)| &\le \kappa(\alpha)\cdot t^{-1/(\alpha-1)}, & x < \ln t + \eta_0.
\end{aligned}
$$

Панов Е. Ю., О классах корректности локально ограниченных обобщённых энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка, Фундамент. и прикл. матем., 2006, т. 12, № 5, с. 175–188.

Гаргянц Л. В., О локально ограниченных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока, Матем. заметки, 2018, т. 104, № 2, с. 191–199.

Горицкий А. Ю., Гаргянц Л. В., О неедиственности неограниченных решений задачи Коши для скалярных законов сохранения, Тр.сем.им.И.Г.Петровского, 2019, т.32, с.111–133.

Общий план построения решений

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Общий план построения решений

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Характеристическая система для уравнения $u_t + (f(u))_x = 0$:

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f'(u), \quad \dot{u} = 0.$$

В областях D_n характеристиками являются прямые линии:

$$x = kt - g_n(k), \quad g_n''(k) < 0, \tag{3}$$

параметризованные угловым коэффициентом k.

Общий план построения решений

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Характеристическая система для уравнения $u_t + (f(u))_x = 0$:

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f'(u), \quad \dot{u} = 0.$$

В областях D_n характеристиками являются прямые линии:

$$x = kt - g_n(k), \quad g_n''(k) < 0, \tag{3}$$

параметризованные угловым коэффициентом k.

- Условие Ранкина-Гюгонио на линии разрыва $x = \gamma_n(t)$:

$$\dot{\gamma}_n(t) = f'(u_n^+(t)) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)}. \tag{4}$$

Общий план построения решений

- $f(u_n^-(t)) = f(u_n^+(t)) + f'(u_n^+(t)) \cdot (u_n^-(t) - u_n^+(t)).$

Общий план построения решений

- $f(u_n^-(t)) = f(u_n^+(t)) + f'(u_n^+(t)) \cdot (u_n^-(t) - u_n^+(t)).$
- Это равенство определяет отображение

$$u^+ = u_n^+(t) \to u^- = u_n^-(t).$$

Мы можем определить и отображение

$$k^+ = f'(u^+) \to k^- = f'(u^-).$$

Общий план построения решений

- Прямые $x = k^+ t - g_n(k^+)$ и $x = k^- t - g_{n+1}(k^-)$ пересекаются в некоторой точке $(t^*, \gamma_n(t^*)) \in \Gamma_n$, т.е.,

$$k^+ t^* - g_n(k+) = k^- t^* - g_{n+1}(k-) = \gamma_n(t^*).$$

Общий план построения решений

- Прямые $x = k^+ t - g_n(k^+)$ и $x = k^- t - g_{n+1}(k^-)$ пересекаются в некоторой точке $(t^*, \gamma_n(t^*)) \in \Gamma_n$, т.е.,

$$k^+ t^* - g_n(k+) = k^- t^* - g_{n+1}(k-) = \gamma_n(t^*).$$

- Поскольку кривая Γ_n является огибающей семейства прямых $x = kt - g_n(k)$, функция $\gamma_n(t)$ является преобразованием Лежандра функции $g_n(k)$. Следовательно, $t^* = g_n'(k^+)$, и мы получаем рекуррентное соотношение

$$g_{n+1}(k^-) = g_n(k^+) + g_n'(k^+)(k^- - k^+).$$

Выпукло-вогнутые функции и отображения $\varphi_f, \tilde{\varphi}_f$

Определение. Функция $f \in C^1(\mathbb{R})$ *принадлежит классу* $\mathcal{F}$, если

1. $f \in C^\infty(-\infty; 0) \cap C^\infty(0; +\infty)$;
2. $f'(u)$ строго монотонно убывает от $+\infty$ до $k_* = f'(0)$ на отрицательной полуоси и строго монотонно возрастает от k_* до $+\infty$ на положительной полуоси; $f''(u) > 0$ при $u > 0$, и $f''(u) < 0$ при $u < 0$.

Выпукло-вогнутые функции и отображения $\varphi_f, \tilde{\varphi}_f$

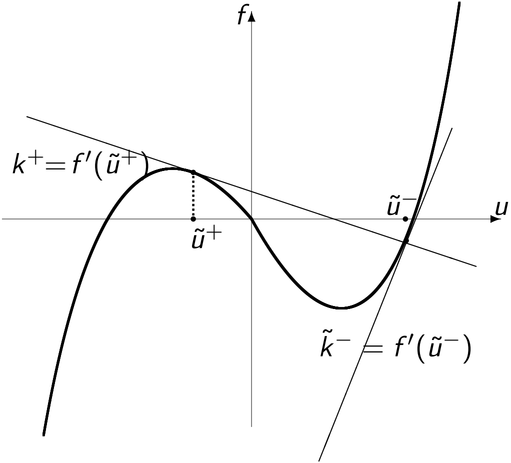
Определение. Функция $f \in C^1(\mathbb{R})$ *принадлежит классу* $\mathcal{F}$, если

1. $f \in C^\infty(-\infty; 0) \cap C^\infty(0; +\infty)$;
2. $f'(u)$ строго монотонно убывает от $+\infty$ до $k_* = f'(0)$ на отрицательной полуоси и строго монотонно возрастает от k_* до $+\infty$ на положительной полуоси; $f''(u) > 0$ при $u > 0$, и $f''(u) < 0$ при $u < 0$.

Определение. Для функций $f \in \mathcal{F}$ определим отображения $k^- = \varphi_f(k^+)$ и $\tilde{k}^- = \tilde{\varphi}_f(k^+)$, $\varphi_f, \tilde{\varphi}_f : (k_*; +\infty) \to (k_*; +\infty)$.

1. Разрешим уравнение $f'(u^+) = k^+$ относительно u^+. Положительный и отрицательный корни обозначим соответственно u^+ и $\tilde{u}^+$.
2. Разрешим уравнение $f(u^-) - f(*) = k^+(u^- - *)$, $* = u^+, \tilde{u}^+$ относительно u^-.
3. Положим $k^- = \varphi_f(k^+) = f'(u^-)$, $\tilde{k}^- = \tilde{\varphi}_f(k^+) = f'(\tilde{u}^-)$.

Заметим, что $\varphi_f = \tilde{\varphi}_f$, если функция f нечетная.



Отображения $\varphi_f, \tilde{\varphi}_f : k^+ \to k^-$.

Основной результат

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Основной результат

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема.

Пусть

1. $f \in \mathcal{F}$ и $f'(0) = k_*$,

Основной результат

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема.

Пусть

1. $f \in \mathcal{F}$ и $f'(0) = k_*$,
2. семейство функций $g_n(k)$, заданных рекуррентным соотношением $g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi_f(k) - k)$ для четных (нечетных) n, $g_{n+1}(\tilde{\varphi}(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\tilde{\varphi}_f(k) - k)$ для нечетных (четных) n, удовлетворяет условиям
   - $g_n(k)$ — бесконечно дифференцируемые, монотонно и неограниченно возрастающие, строго выпуклые вверх функции, определенные на $(k_*; +\infty)$;

Основной результат

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема.

Пусть

1. $f \in \mathcal{F}$ и $f'(0) = k_*$,
2. семейство функций $g_n(k)$, заданных рекуррентным соотношением
$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi_f(k) - k)$ для четных (нечетных) n,
$g_{n+1}(\tilde{\varphi}(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\tilde{\varphi}_f(k) - k)$ для нечетных (четных) n,
удовлетворяет условиям
   - $g_n(k)$ — бесконечно дифференцируемые, монотонно и неограниченно возрастающие, строго выпуклые вверх функции, определенные на $(k_*; +\infty)$;
   - $g_n'(k_* + 0) = +\infty, \quad g_n'(+\infty) = 0.$

Основной результат

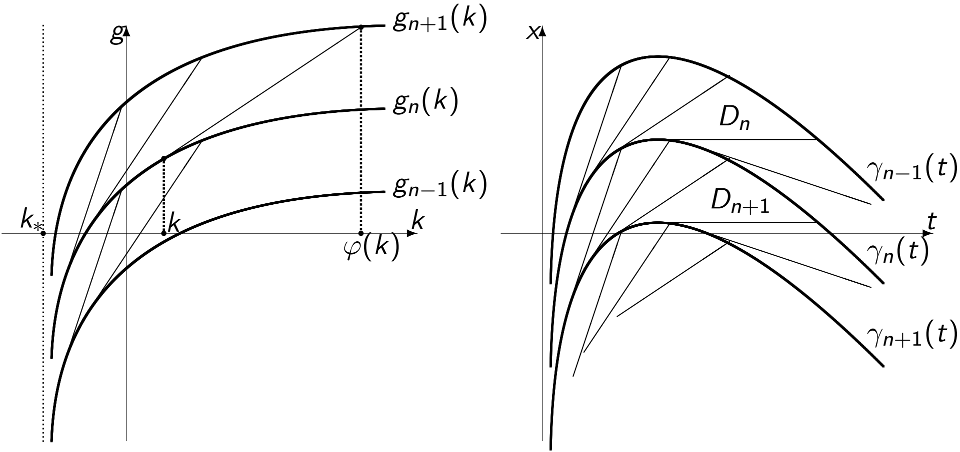
$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема.

Пусть

1. $f \in \mathcal{F}$ и $f'(0) = k_*$,
2. семейство функций $g_n(k)$, заданных рекуррентным соотношением $g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi_f(k) - k)$ для четных (нечетных) n, $g_{n+1}(\tilde{\varphi}(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\tilde{\varphi}_f(k) - k)$ для нечетных (четных) n, удовлетворяет условиям
   - $g_n(k)$ — бесконечно дифференцируемые, монотонно и неограниченно возрастающие, строго выпуклые вверх функции, определенные на $(k_*; +\infty)$;
   - $g_n'(k_* + 0) = +\infty, \quad g_n'(+\infty) = 0.$

Тогда существует о.э.р. $u(t,x)$ задачи Коши с начальным условием $u_0(x) = (-g_0 \circ f')^{-1}(x) \quad (u_0(x) = -(-g_0 \circ f')^{-1}(x))$.



Функции $g_n(k)$, заданные рекуррентно, и их пребразования Лежандра $\gamma_n(t)$.

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

I. $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \cdot k.$
Пусть $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma.$

Линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{-\gamma} = 1, \text{ т.е. } \gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0.$$

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

I. $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \cdot k.$
Пусть $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma$.

Линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{-\gamma} = 1, \text{ т.е. } \gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0.$$

Начальное условие:

$-g_0 \circ f'(u) = -(|u|^{\alpha-1})^\sigma$

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

I. $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}\cdot k.$
Пусть $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma.$

Линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{-\gamma} = 1, \text{ т.е. } \gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0.$$

Начальное условие:

$-g_0 \circ f'(u) = -(|u|^{\alpha-1})^\sigma \Longrightarrow \quad u_0(x) = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x) = \pm|x|^{\frac{1}{\sigma(\alpha-1)}}$ (при $x < 0$).

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

I. $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \cdot k.$
Пусть $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma.$

Линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{-\gamma} = 1, \text{ т.е. } \gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0.$$

Начальное условие:

$-g_0 \circ f'(u) = -(|u|^{\alpha-1})^\sigma \Longrightarrow \quad u_0(x) = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x) = \pm|x|^{\frac{1}{\sigma(\alpha-1)}}$
(при $x < 0$).

II. Пусть $g_0(k) = \ln k.$
Тогда $g_n(k) = \ln k + C_n.$

Линии разрыва: $\Gamma_n = x = \ln t + 1 - C_n.$

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

I. $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \cdot k.$
Пусть $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma.$

Линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \tfrac{1}{\sigma} + \tfrac{1}{-\gamma} = 1, \ \text{т.е.} \ \gamma = \tfrac{\sigma}{1-\sigma} > 0.$$

Начальное условие:

$-g_0 \circ f'(u) = -(|u|^{\alpha-1})^\sigma \Longrightarrow \quad u_0(x) = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x) = \pm|x|^{\frac{1}{\sigma(\alpha-1)}}$
(при $x < 0$).

II. Пусть $g_0(k) = \ln k.$
Тогда $g_n(k) = \ln k + C_n.$

Линии разрыва: $\Gamma_n = x = \ln t + 1 - C_n.$

Начальное условие: $-g_0 \circ f'(u) = -\ln|u|^{\alpha-1} = -(\alpha-1)\ln|u|.$

Примеры

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

I. $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \cdot k.$
Пусть $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma.$

Линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{-\gamma} = 1, \text{ т.е. } \gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0.$$

Начальное условие:

$-g_0 \circ f'(u) = -(|u|^{\alpha-1})^\sigma \Longrightarrow \quad u_0(x) = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x) = \pm|x|^{\frac{1}{\sigma(\alpha-1)}}$
(при $x < 0$).

II. Пусть $g_0(k) = \ln k.$
Тогда $g_n(k) = \ln k + C_n.$

Линии разрыва: $\Gamma_n = x = \ln t + 1 - C_n.$

Начальное условие: $-g_0 \circ f'(u) = -\ln|u|^{\alpha-1} = -(\alpha - 1)\ln|u|.$

$\Longrightarrow \quad u_0(x) = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x) = \pm e^{-x/(\alpha-1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Примеры

III. $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u + Bu, \quad \alpha > 1, \quad A > 0$
$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}(k - B) + B, \quad \varphi\colon (B;+\infty) \to (B;+\infty)$
Пусть $\quad g_0(k) = C_0\,(k - B)^{\sigma} \quad$ или $\quad g_0(k) = \ln\,(k - B) + C_0.$
Тогда $\quad g_n(k) = C_n\,(k - B)^{\sigma} \quad$ или $\quad g_n(k) = \ln\,(k - B) + C_n.$

В этом случае

$$k_* = f'(0) = \inf f' = B \neq 0.$$

Примеры

III. $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u + Bu, \quad \alpha > 1, \quad A > 0$
$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}(k - B) + B, \quad \varphi\colon (B; +\infty) \to (B; +\infty)$
Пусть $\quad g_0(k) = C_0\,(k - B)^{\sigma} \quad$ или $\quad g_0(k) = \ln\,(k - B) + C_0.$
Тогда $\quad g_n(k) = C_n\,(k - B)^{\sigma} \quad$ или $\quad g_n(k) = \ln\,(k - B) + C_n.$

В этом случае
$$k_* = f'(0) = \inf f' = B \neq 0.$$
Линии разрыва

- в первом случае $\quad x = \mathrm{const} \cdot t^{-\sigma/(1-\sigma)} + Bt,$

Примеры

III. $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u + Bu, \quad \alpha > 1, \quad A > 0$
$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}(k - B) + B, \quad \varphi\colon (B; +\infty) \to (B; +\infty)$
Пусть $\quad g_0(k) = C_0\,(k - B)^{\sigma} \quad$ или $\quad g_0(k) = \ln(k - B) + C_0.$
Тогда $\quad g_n(k) = C_n\,(k - B)^{\sigma} \quad$ или $\quad g_n(k) = \ln(k - B) + C_n.$

В этом случае

$$k_* = f'(0) = \inf f' = B \neq 0.$$

Линии разрыва

- в первом случае $\quad x = \mathrm{const} \cdot t^{-\sigma/(1-\sigma)} + Bt,$
- во втором случае $\quad x = \ln t + 1 - C_n + Bt.$

Примеры

III. $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u + Bu, \quad \alpha > 1, \quad A > 0$
$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}(k - B) + B, \quad \varphi\colon (B;+\infty) \to (B;+\infty)$
Пусть $\quad g_0(k) = C_0\,(k-B)^\sigma \quad$ или $\quad g_0(k) = \ln(k-B) + C_0.$
Тогда $\quad g_n(k) = C_n\,(k-B)^\sigma \quad$ или $\quad g_n(k) = \ln(k-B) + C_n.$

В этом случае

$$k_* = f'(0) = \inf f' = B \neq 0.$$

Линии разрыва

- в первом случае $\quad x = \mathrm{const} \cdot t^{-\sigma/(1-\sigma)} + Bt,$
- во втором случае $\quad x = \ln t + 1 - C_n + Bt.$

Начальные условия от B не зависят,
меняется наклон линий разрыва при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \dot\gamma_n(t) = B \neq 0.$$

Гаргянц Л. В., Горицкий А. Ю., Панов Е. Ю. Построение неограниченных разрывных решений скалярных законов сохранения при помощи преобразования Лежандра, Матем.сб., 2021, т. 212, № 4, с. 29–44.

Примеры

$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi_f(k) - k)$ для четных n,
$g_{n+1}(\tilde{\varphi}(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\tilde{\varphi}_f(k) - k)$ для нечетных n.

IV. $f(u) = \begin{cases} A_1|u|^{\alpha-1}u, \ u > 0, \\ A_2|u|^{\alpha-1}u, \ u < 0, \ A_1, A_2 > 0. \end{cases}$

Примеры

$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi_f(k) - k)$ для четных n,
$g_{n+1}(\tilde{\varphi}(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\tilde{\varphi}_f(k) - k)$ для нечетных n.

IV. $f(u) = \begin{cases} A_1|u|^{\alpha-1}u, & u > 0, \\ A_2|u|^{\alpha-1}u, & u < 0, \; A_1, A_2 > 0. \end{cases}$

$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}\frac{A_2}{A_1}k, \quad \tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varkappa}^{\alpha-1}\frac{A_1}{A_2}k.$

Пусть $g_0(k) = \ln k - C_0$. Тогда
$g_n(k) = \ln k - C_n, \quad u_0(x) = \exp(-x/(\alpha-1)).$
Пусть $g_0(k) = C_0 k^\sigma$. Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma, \quad u_0(x) = |x|^{\frac{1}{\sigma(\alpha-1)}}$.

Спасибо!

Спасибо!