Разрешимость одной модели нелинейно–вязкой среды

**Звягин
Андрей Викторович**

Воронежский Государственный Университет
zvyagin.a@mail.ru

Вторая конференция Математических центров России
Секция "Уравнения с частными производными"

Модель Фойгта

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}$$

Renardy M.
Mathematical analysis of viscoelastic flows,
Annual Review of Fluid Mechanics. 1989.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \operatorname{grad}\, p = f$$

$$\operatorname{div}\, v = 0$$

Здесь v — вектор–функция скорости движения частицы среды, p — функция давления, ν — вязкость среды, $\varkappa > 0$ — запаздывание среды, f — функция плотности внешних сил.

Литература

Осколков А. П.,
К теории жидкостей Фойгта,
Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980.

Ramos F., Titi E.S.,
Invariant measures for the 3D Navier-Stokes-Voigt equations and their Navier-Stokes limit,
Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2010. (An invite article for a special issue in honor of Professor R. Temam on the occasion of his 70th birthday).

Kalantarov V. K., Titi E. S.,
Global attractors and determining modes for the 3D Navier–Stokes–Voight equations,
Chinese Annals of Mathematics. Series B.. 2009.

Larios, M.R. Petersen, E.S. Titi, and Beth Wingate,
A computational investigation of the finite-time blow-up of the 3D incompressible Euler equations based on the Voigt regularization,
Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2018.

Нелинейная вязкость

$$\sigma = 2\nu(I_2)\mathcal{E}(v) + 2\varkappa\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}, \qquad I_2^2(v) = \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}^2(v)$$

Вязкость среды ν задается непрерывно дифференцируемой скалярной функцией, для которой, предполагаются следующие ограничения:

a) $0 < C_1 \leq \nu(s) \leq C_2 < \infty, \quad s \in [0, \infty);$

b) $|s\nu'(s)| \leq C_3 < \infty, \quad s \in [0, \infty);$

c) $-s\nu'(s) \leq \nu(s)$ при $\nu'(s) < 0.$

Литвинов В. Г.

Движение нелинейно–вязкой жидкости,

М.: Наука. 1982.

Модель с температурой

$$\sigma = 2\nu(I_2)\mathcal{E} + 2\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ \left(\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)\right) - 2\mathrm{Div}\ \left(\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t}\right) = f;$$

$$\mathrm{div}\ v = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\,\theta = 2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g;$$

$$v\big|_{t=0} = v_0; \qquad v\big|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0;$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0; \qquad \theta\big|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0.$$

Здесь $\theta(t,x)$ – функция температуры, g – функция внешнего теплового источника, $\chi > 0$ – коэффициент теплопроводности.

Определение слабого решения

Определение

Слабым решением начально–краевой задачи для термо–модели Фойгта называется пара (v, θ), где $v \in E_1 = \{v : v \in C([0, T]; V^1),\ v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$,

$$\theta \in E_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))\},$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v\,\varphi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx +$$

$$+\int_\Omega \varkappa(\theta)\mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle \quad \text{при всех } \varphi \in V \text{ и п.в. } t \in [0, T],$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta\phi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\,dx + \chi\int_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi)\,dx = 2\int_\Omega \big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi\,dx +$$

$$+2\int_\Omega \big(\varkappa(\theta)\mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi\,dx + \langle g, \phi\rangle \quad \text{при всех } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ и п.в. } t \in [0, T],$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Существование слабых решений

Теорема

Пусть функция $\varkappa(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 \le \varkappa(\theta) \le C_5$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $g \in L_1(0, T; L_1(\Omega))$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$ и вязкость рассматриваемой среды ν удовлетворяет условиям $a) - c)$. Тогда

$$\text{при } 1 < p < 4/3 \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$\text{при } 1 < p < 10/9 \text{ для } n = 3$$

существует слабое решение

$$v \in E_1 = \{v : v \in C([0, T]; V^1),\ v' \in L_2(0, T; V^{-1})\} \text{ и}$$

$$\theta \in E_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))\}.$$

Схема доказательства

- Устанавливается разрешимость задачи с известной $\theta \in E_2$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)) - 2\mathrm{Div}\,(\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t}) + \mathrm{grad}\ p = f;$$

$$\mathrm{div}\ v = 0 \text{ в } Q_T; \qquad v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0.$$

Теорема

Пусть функция $\varkappa(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 \leq \varkappa(\theta) \leq C_5$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$, $\theta \in E_2$ и вязкость рассматриваемой среды ν удовлетворяет условиям $a) - c)$. Тогда задача с фиксированной температурой $\theta \in E_2$ имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$, для которого справедлива оценка

$$\|v\|_{E_1} \leqslant C_6, \quad C_6 = C_6(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^1}).$$

Схема доказательства

- Затем устанавливается разрешимость задачи с заданной $v \in E_1$.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = 2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g;$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0.$$

Теорема

Пусть функция $\varkappa(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 \le \varkappa(\theta) \le C_5$, $g \in L_1(0, T; L_1(\Omega))$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $v \in E_1$ и вязкость рассматриваемой среды ν удовлетворяет условиям $a) - c)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ задача с фиксированной скоростью $v \in E_1$ имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка

$$\|\theta\|_{E_2} \le C_7(\|g\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|\frac{\partial v}{\partial t}\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}).$$

Zvyagin V. G., Orlov V. P. *Solvability of a parabolic problem with non–smooth data* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. V. 453. P. 589–606.

Схема доказательства

- Описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач.
  Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0. Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(I_2(v^{n+1}))\mathcal{E}(v^{n+1})) - 2\mathrm{Div}\,(\varkappa(\theta^n)\frac{\partial \Delta v^{n+1}}{\partial t})+$$

$$+\mathrm{grad}\ p = f;$$

$$\mathrm{div}\ v^{n+1} = 0 \quad \text{в } Q_T; \quad v^{n+1}|_{t=0} = v_0 \quad \text{в } \Omega; \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0;$$

  затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta^{n+1} =$$

$$= 2\nu(I_2(v^{n+1}))\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + 2\varkappa(\theta^{n+1})\frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial t} : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g;$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0.$$

- Доказывается сходимость последовательных приближений к решению исходной задачи.

Управляемые системы

Рассматривается *управляемые системы с обратной связью* вида:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(t, x(t)) \end{cases}$$

где $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $I = [t_0, T]$; $\mathbb{R}^m$ — пространство управляющих параметров, функция $u(x)$ — управляющий параметр, который в каждый момент времени t выбирается из соответствующего множества допустимых управлений U, зависящего, вообще говоря, как от времени, так и от состояния системы. Мультиотображение $U : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ называется мультифункцией обратной связи ($K(Y)$ — совокупность, состоящая из всех компактных подмножеств Y).

Решением управляемой системы называется пара x, u, состоящая из траектории x и управления u. Здесь $x : I \to \mathbb{R}^n$ — функция, удовлетворяющая уравнению $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ почти всюду на I, а $u : I \to \mathbb{R}^m$ — измеримая функция, удовлетворяющая включению $u(t) \in U(t, x(t))$ всюду на I.

Дифференциальные включения

От управляемой системы перейдем к ассоциированному с ней дифференциальному включению:

$$x'(t) \in F(t, x(t)).$$

Каждая траектория управляемой системы с обратной связью является решением включения. Лемма Филиппова позволяет установить и обратную связь.

Теорема.

При условиях (f1)-(f2) и (U1)-(U4) для любого решения x включения найдется измеримая функция $u : I \to \mathbb{R}^m$ такая, что пара $\{x, u\}$ будет решением управляемой системы с обратной связью.

Условия

$(f1)$ Для каждых $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot,x,u) : I \to \mathbb{R}^n$ измерима;

$(f2)$ Для п.в. $t \in I$ отображение $f(t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывно;

$(U1)$ Мультиотображение U удовлетворяет верхним условиям Каратеодори;

$(U2)$ Мультиотображение U измеримо;

$(U3)$ Множество $F(t,x) = f(t,x,U(t,x))$ выпукло для всех $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$;

$(U4)$ Мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям подлинейного роста.

Следствие

Установленная эквивалентность управляемых систем и дифференциальных включений позволяет без труда переносить на управляемые системы полученные ранее утверждения, касающиеся дифференциальных включений. Более того, изученные свойства множеств решений дифференциальных включений могут быть использованы для решений задач оптимизации.

Теорема.

Пусть $\varphi : C(I, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — полунепрерывный снизу функционал. Тогда при условиях $(f1), (f2)$ и $(U1) - (U4)$ существует решение $\{x_*, u_*\}$ управляемой системы, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$ и такое, что

$$\varphi(x_*) = \min_{x \in \Sigma(x_0)} \varphi(x),$$

где $\Sigma(x_0)$ — множество всех траекторий управляемой системы, удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Приложения

- Задача регулировки вращения вокруг некоторой оси космического летательного аппарата, снабженного двигателями управления;
- Задачи математической экономики (к примеру, модель экономической динамики типа Неймана–Гейла);
- Задачи дифференциальных уравнений с разрывной правой частью (к примеру, модель автопилота).

Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский
Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений
Москва, УРСС, 2005.

J.P. Aubin, A. Cellina.
Differential inclusions. Set valued maps and viability theory.
Springer–Verlag, Berlin, 1984.

Задача оптимального управления для термо–модели

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,\left(\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)\right) - 2\mathrm{Div}\,\left(\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t}\right) = f;$$

$$f \in F(v);$$

$$\mathrm{div}\; v = 0;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\,\theta - 2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) - 2\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) = g;$$

$$g \in G(\theta);$$

$$v\big|_{t=0} = v_0; \qquad v\big|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0;$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0; \qquad \theta\big|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0.$$

Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.
On Inclusions with Multivalued Operators and Their Applications to Some Optimization Problems
Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2014. Vol.16. pp. 27–82.

Многозначное отображение

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap W_2$ в качестве функции управления (W_1 и W_2 — нормированные пространства). Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $C_8 > 0$ такая, что для всех $v \in W_1$

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup\left\{\|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi(v)\right\} \leq C_8;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:
если $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W_1$, $v_l \rightharpoonup v_0$, $u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$ тогда $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Пример мультиотображения

Пусть непрерывные отображения $f_i : W \to L_2(0, T; V^{-1}), \quad i = 1, 2, \ldots m$ удовлетворяют условиям:

1. f_i глобально ограничен и переводит ограниченное множество в относительно компактное;
2. f_i — слабо замкнуто, т.е. $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W, v_l \rightharpoonup v_0,\ f_i(v_l) \to u_0$ следует $u_0 = f_i(v_0)$.

Определим мультиотображение с обратной связью $U : W \to L_2(0, T; V^{-1})$:

$$U(v) = \left\{ u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(v) \ : \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Легко видеть, что U удовлетворяет всем условиям многозначного отображения Ψ.

Определение слабого решения

Определение

Слабым решением задачи управления с обратной связью называется (v, θ, f, g), где

$$v \in E_1, \quad \theta \in E_2, \quad f \in L_2(0, T; V^{-1}), \quad g \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)),$$

удовлетворяющие условиям обратной связи, соотношениям

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v\,\varphi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \varkappa(\theta)\mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle \quad \text{при всех } \varphi \in V \text{ и п.в. } t \in [0, T],$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta\phi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\,dx + \chi\int_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi)\,dx = 2\int_\Omega (\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)) : \phi\,dx +$$

$$+2\int_\Omega \left(\varkappa(\theta)\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v)\right) : \phi\,dx + \langle g, \phi\rangle \quad \text{при всех } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ и п.в. } t \in [0, T],$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Существование слабого решения задачи управления

Теорема 1

Пусть функция $\varkappa(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 \leq \varkappa(\theta) \leq C_5$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$ и вязкость рассматриваемой среды ν удовлетворяет условиям $a) - c)$. Также пусть многозначные отображения F и G удовлетворяют условиям $(\Psi 1)$–$(\Psi 4)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ существует слабое решение задачи управления с обратной связью для термо–модели Фойгта.

Обозначим через $\Sigma \subset E_1 \times E_2 \times L_2(0, T; V^{-1}) \times L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$ множество всех слабых решений задачи. Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$(\Phi 1)$ Существует число γ такое, что $\Phi(v, \theta, f, g) \geqslant \gamma$ для всех $(v, \theta, f, g) \in \Sigma$.

$(\Phi 2)$ Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1, $\theta_m \to \theta_*$ в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, $\theta_m \rightharpoonup \theta_*$ в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, $f_m \to f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$ и $g_m \to g$ в $L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, то

$$\Phi(v_*, \theta_*, f_*, g_*) \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \Phi(v_m, \theta_m, f_m, g_m).$$

Существование оптимального управления

В качестве примера такого функционала качества можно рассмотреть:

$$\Phi(v,\theta,f,g) = \int_0^T (\|v(t,\cdot) - U(t,\cdot)\|^2_{V^1} + \|\theta(t,\cdot) - \Theta(t,\cdot)\|^2_{W^1_p} +$$
$$+\|f(t,\cdot) - F(t,\cdot)\|^2_{V^{-1}} + \|g(t,\cdot) - G(t,\cdot)\|^2_{W^{-1}_p})dt.$$

Здесь U, Θ, F и G заданные скорость, температура, внешняя сила и внешний источник тепла.

Теорема 2

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и пусть функционал качества Φ удовлетворяет условиям (Φ1)–(Φ2), тогда задача оптимального управления с обратной связью для термо–модели Фойгта имеет хотя бы одно слабое решение $(v_*, \theta_*, f_*, g_*)$ такое, что

$$\Phi(v_*, \theta_*, f_*, g_*) = \inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma} \Phi(v,\theta,f,g).$$

Спасибо за внимание!