

Исследование слабой разрешимости одной дробной модели с бесконечной памятью

Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет
e-mail: ekaterinarshina@mail.ru

Вторая конференция Математических центров России
Секция "Уравнения с частными производными"

Введение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \\ & - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ & + \nabla p = f(t, x), \quad t \in (-\infty, T], x \in \Omega; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in (-\infty, T], x \in \Omega; \quad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)), \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$v(t, x) |_{(t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Функциональные пространства

Определим следующие функциональные пространств:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V) \cap L_\infty(-\infty, T; H), \\ v' \in L_2(-\infty, T; V^{-1})\}, n = 2;$$

$$W_2 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V) \cap L_\infty(-\infty, T; H), \\ v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}, n = 3.$$

Здесь $L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})$ пространство, состоящее из функций v , определенных почти всюду на $(-\infty, T]$ и принимающих значение в V^{-1} , сужение которых на любой отрезок $[r, T] \in (-\infty, T]$ принадлежит $L_{4/3}(r, T; V^{-1})$.

Пусть $W = W_1$ для $n = 2$ и $W = W_2$ для $n = 3$.

Теория регулярных лагранжевых потоков

Определение

Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при п.в. x и любом $t \in [0, T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T]; \quad (5)$$

2. для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;

3. при всех $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, 3}$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$

$$z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x)). \quad (6)$$

Теорема 1.

Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ и $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D; L)$, порожденный v

$$z(\tau; t, \bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad \tau \in [0, T], x \in \Omega, \quad (7)$$

где $C(D, L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0, T] \times [0, T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор-функций.



DiPerna R. J., Lions P. L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // *Inventiones mathematicae*. 1989. V. 98. P. 511–547.



Crippa G., de Lellis C. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*. 2008. V. 616. P. 15–46.



Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields // *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 9. 2008. — V. 1. — P. 333–348.

Теорема 2.

Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; W_1^p(\Omega))$, $m = 1, 2, \dots$, при некотором $p > 1$. Пусть $\operatorname{div} v(t, x) = 0$, $\operatorname{div} v^m(t, x) = 0$, $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Пусть выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} &\leq C_1, \\ \|v_x^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} &\leq C_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1(Q_T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $z(\tau; t, x)$ и $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденные v и v^m соответственно. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ при $t \in [0, T]$.

Определение слабого решения

Определение

Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Слабым решением задачи (1)–(4) будем называть функцию $v \in W$, удовлетворяющую тождеству при любых $\varphi \in V$ и п. в. $t \in (-\infty, T]$

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

здесь z – РЛП, порожденный v .

Основной результат

Теорема 3.

Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда задача (1)–(4) имеет по крайней мере одно слабое решение.

Аппроксимационная задача

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^m}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v_i^m v^m}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})} - \mu_0 \Delta v^m - \\ & \mu_1 \frac{\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) ds \\ & + \nabla p^m = \xi f^m, \quad t \in [-m, T], x \in \Omega; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\operatorname{div} v^m(t, x) = 0, \quad t \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (10)$$

$$z^m(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v^m(s, z^m(s; t, x)), \quad t, \tau \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (11)$$

$$v^m(t, x) |_{\Gamma} = 0, (t, x) \in \Gamma_m = [-m, T] \times \partial\Omega, \quad v^m(-m, x) = 0, x \in \Omega. \quad (12)$$

$$W(m) = \{v : v \in L_2(-m, T; V), v' \in L_2(-m, T; V^{-1})\}.$$

Определение

Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Слабым решением задачи (9)–(12) называется функция $v^m \in W(m)$, удовлетворяющая равенству:

$$\begin{aligned} \langle (v^m)', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla(v^m) : \nabla(\varphi) dx \\ + \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi) ds dx \\ = \xi \langle f^m, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

для любых $\varphi \in V$ и почти всех $t \in [-m, T]$, и начальному условию $v^m(-m, \cdot) = 0$. Здесь z^m – РЛП, порождённый v^m .

Операторная трактовка

$$J : V \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv^m, \varphi \rangle = \langle v^m, \varphi \rangle \quad v^m \in V^{-1}, \quad \varphi \in V;$$

$$A : V \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av^m, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx, \quad v^m \in V, \quad \varphi \in V;$$

$$B : V \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow V^{-1},$$

$$(B(v^m, z^m)(t), \varphi) = \left\langle \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \, dx \right\rangle,$$

$$v^m \in V, \quad z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}, \quad \varphi \in V$$

$$K_{\varepsilon} : V \rightarrow V^{-1}, \quad \langle K_{\varepsilon}(v^m), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{\left(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon}\right)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx,$$

$$v^m \in V, \quad \varphi \in V$$

$$J(v^m)' + \mu_0 A v^m + \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) - \xi K_\varepsilon(v^m) = \xi f^m. \quad (13)$$

$$L : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V, \quad L(v^m) = (Jv^{m'} + \mu_0 A v^m, v^m|_{t=-m});$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V, \quad \mathcal{K}_\varepsilon(v^m) = (K_\varepsilon(v^m), 0);$$

$$G : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V, \quad G(v^m) = (\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m), 0).$$

Получаем:

$$L(v^m) = \xi(\mathcal{K}_\varepsilon(v^m) - G(v^m) + (f^m, 0)).$$

Априорные оценки

Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого решения $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (13) следуют оценки:

$$\|v^m\|_{L_2(-m, T; V)} \leq C_3 \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})};$$

$$\|v^{m'}\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_4 \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2;$$

$$\|v^{m'}\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \leq C_5 (\|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + 1),$$

$$\|v^m\|_{W(m)} \leq C_6,$$

где константы C_3 и C_5 не зависят от ε .

Теорема 4.

Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда задача (9)–(12) имеет по крайней мере одно слабое решение $v^m \in W(m)$ для $\xi = 1$.



Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных: интегральных уравнений, М. 1956.



Садовский Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы // УМН. 1972. Т. 163. С. 81–146.



Звягин В.Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений фредгольмовых отображений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями // Математический сборник. 1991. Т. 182. С. 1740–1768.

Дополнительные оценки

Пусть $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда для функции v^m справедливы оценки:

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |v^m(t, \cdot)|_H + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V)} \leq C_7 \|f^m\|_{L_2(-\infty, T; H)} \quad (14)$$

с независящей от m константой C_7 .

Предельный переход

- последовательность v^m сходится слабо к v в $L_2(-\infty, T; V)$;
 - последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится к $z(\tau; t, x)$ по мере;
 - последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; H)$, сильно в $L_2(Q)^n$, п.в. на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$;
 - последовательность v^m сходится сильно к v в $L_2(-\infty, T; L_4(\Omega))$;
- совершаем предельный переход сначала при $m \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Спасибо за внимание!