Вторая конференция Математических центров России
(7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва)

Об асимптотическом поведении положительных решений полулинейного параболического уравнения в цилиндре

Ирина Филимонова
filimi@yandex.ru

11 ноября 2022

Московский государственный университет им М.В.Ломоносова

Старый результат о положительных решениях

в цилиндре $\Pi_0 = \{(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\}$, область $\Omega \subset R^n$ ограничена:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u^q, \quad 0 < q < 1. \tag{1}$$

решения, удовлетворяющие условию Неймана на $S = \partial\Omega \times (0,\infty)$,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = 0 \tag{2}$$

Коэффициент $a_0 = const > 0$, $a_{i,j}(x,t)$ - ограниченны измеримы и $\lambda_1|\xi|^2 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j < \lambda_2|\xi|^2$, постоянные $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ не зависят от t.

Под решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2), понимается функция из $W^{1,1}_{2,loc}$, удовлетворяющая уравнению (1) в смысле интегрального тождества.

Старый результат о положительных решениях

в цилиндре $\Pi_0 = \{(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\}$, область $\Omega \subset R^n$ ограничена:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u^q, \ \ 0 < q < 1. \tag{1}$$

$a_0 = const > 0.$

$$\dot{\alpha} = a_0 \alpha^q$$

Теорема. *Пусть* u — положительное в $\Omega \times (0,\infty)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условию Неймана (2). Тогда

$$u(x,t) = [a_0(1-q)(t+t_0)]^{1/(1-q)} + O(e^{-\delta t}),$$

где $\delta > 0$ не зависит от $u(x,t)$, а постоянная t_0 однозначно определяется решением $u(x,t)$.

Цель: аналогичный результат для $f(u)$

ИФ RJMP, vol 10, № 2, 2003, pp. 234-237

Результаты для другой нелинейности

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) - a(x)f(u), \quad 0 \le a(x) \le a_0$$

$f(0) = 0$, $\frac{f(u)}{|u|} \uparrow$, $f'(u) \to 0$, при $u \to 0$.

Положительное решение, удовлетворяющее условию Неймана:

$$u(x,t) = \beta(t)(1+o(1)) \text{ при } t \to \infty, \dot{\beta} = -\bar{a}f(\beta), \bar{a} = \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega a(x)dx$$

$Th.Boni$	дост. усл	$\frac{f(\beta(t))}{\beta(t)} = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$,
ИФ	дост. усл	$\int_0 \frac{df(u)}{u} < \infty$ ($\int_0 \frac{f(u)}{u^2} du < \infty$)
ИФ	контрпример	$a(x) \ne const$, $\frac{u}{\lvert \ln \lvert u \rvert \rvert^q}$, $0 < q < 1$
В.А.Кондратьев	$(f(x,u))$д.у.	$\frac{f(\beta(t))}{\beta(t)} = o(t^{-1/2})$, $\overline{\lim}\sqrt{t} f'(\beta(t)) < C$

Th. Boni Nonlinear anal, 45 (2001) 895-908

*ИФ Труды сем.Петровск., **26**, (2007), 369–390.*

*Кондратьев В.А. Труды МИАН, **260**, (2008), 180–192*

Метод ЕКО

Пусть вектор - функция $f(u,t) = (f_1, \ldots, f_N)$ определена при $\|u\| = \max_i |u_i| < a$, $f(0,t) \equiv 0$, непрерывна по u. Пусть также существует производные $(f_i)_{u_j}$ при $\|u\| < a$ и $\lim_{u\to 0}(f_i)_{u_j} = 0$ равномерно по t. Тогда решение системы в области Π_0

$$(u_k)_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) - f_k(u,t),$$

удовлетворяющее условию Неймана на S и такое что $\lim_{t\to\infty} u = 0$, то

$$u(x,t) = \chi(t) + v(x,t), \text{ где } \dot{\chi} + f(\chi,t) = 0,$$

а $v(x,t)$ таково, что $\int_{\Pi_\tau} v^2 dxdt = O(e^{-\alpha t})$, $\alpha > 0$ при $t \to \infty$

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, Матем. сб., 189:3 (1998), 45–68;

Произвольная нелинейность типа $+u^q$, $0 < q < 1$

Поведение в Π_0 положительных решений уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + f(u) \tag{3}$$

удовлетворяющих условию Неймана (2).

$$\dot{\beta} = f(\beta)$$

Условия $f(\beta) > 0$, $\int^{\infty} \frac{d\beta}{f(\beta)}$ расходится $\Rightarrow \beta \uparrow$ и $\beta \to \infty$ при $t \to \infty$

$\frac{f(u)}{u} \to 0$, $u \to \infty \Rightarrow \beta(t) \sim \beta(t+c)$ при $t \to \infty$

$\int^{\infty} \frac{d\beta}{f(\beta)} = \int^{\infty} \frac{d\beta}{\beta}\frac{\beta}{f(\beta)} > \delta \int^{\infty} \frac{d\beta}{\beta} = \infty$

$\frac{\beta(t+k)-\beta(t)}{\beta(t+k)} = \frac{\dot{\beta}(t+\theta k)k}{\beta(t+k)} = \frac{f(\beta(t+\theta k))}{\beta(t+\theta k)}\frac{\beta(t+\theta k)}{\beta(t+k)} \to 0$, т.к. $\frac{\beta(t+\theta k)}{\beta(t+k)} < 1$

Выбор правильного решения ОДУ

Под решением $u(x,t)$ уравнения (3), удовлетворяющим условию (2), понимается обобщенное решение $u(x,t) \in W_2^{1,1}(\Pi_{a,b}) \cap L_\infty(\Pi_{a,b})$ при любых a, b, $0 < a < b < \infty$.
$u(x,t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера в $\overline{\Pi}_{a,b}$.
ЛЕММА *Принцип максимума*
Пусть $u(x,t)$, $v(x,t)$ — положительные решения уравнения (3), удовлетворяющие условию (2) такие, что $u(x,t_0) \le v(x,t_0)$, $x \in \Omega$. Тогда $u(x,t) \le v(x,t)$ при $t > t_0$, $x \in \Omega$.
СЛЕДСТВИЕ $\beta(t+t_1) \le u(x,t) \le \beta(t+t_2)$
ВЫБОР τ_0 : Положим

$$\tau_0 = \inf\{\tau \,|\, \exists\, T_\tau : \; u(x,t) \le \beta(t+\tau) \text{ при } t > T(\tau)\}$$

ясно, что $t_1 \le \tau_0 \le t_2$.
БОЛЕЕ ТОГО: из неравенства Харнака вплоть до границы $\Pi_{a,b}$

$$u - \beta(t+\tau_0) = o(\beta(t)) \text{ при } t \to \infty$$

Преобразования и подбор условий

Замена: $v = u - \beta(t+\tau_0) = o(\beta(t))$ при $t \to \infty$

$$\frac{f(u)-f(\beta)}{u-\beta} = f'(uA + B\beta) \sim f'(\beta)\frac{uA+\beta B}{\beta} = f'(\beta)(1 + o(\frac{f(\beta)}{\beta}))$$

$$v_t = Lv + f'(\beta)(1 + o(\frac{f(\beta)}{\beta}))v$$

Замена: $v = wf(\beta)$

$$w_t f(\beta) + wf'(\beta)\dot{\beta} = Lwf(\beta) + f'(\beta)wf(\beta)(1 + o(\frac{f(\beta)}{\beta}))$$

$$w_t + wf'(\beta) = Lw + f'(\beta)w(1 + o(\frac{f(\beta)}{\beta}))$$

$$w_t = Lw + wf'(\beta)(o(\frac{f(\beta)}{\beta}))$$

$$w_t = Lw + w(o(\frac{f^2(\beta)}{\beta^2}))$$

Окончание доказательства

Теорема *Решение $w(x,t) = o(1)$ уравнения*

$$w_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}) + b(x,t)w,$$

с $b(x,t) = o(t^{-1-\varepsilon})$ при $t \to \infty$, удовлетворяющее условию Неймана (2) экспоненциально стремится к нулю: $w(x,t) = o(\exp(-\alpha t))$, где α – не зависит от $w(x,t)$.

ШАГ 1: Построить решение $w_0(x,t)$ уравнения (4), удовлетворяющее (2)

$$0 < k_1 \leq w_0(x,t) \leq k_2.$$

как предел последовательности $w_m(x,t)|_{t=m} = 1$

ШАГ 2 (далее аналогично ЕКО): $\int_\Omega ww_0 dx = 0$

ШАГ 3: Выбирая ww_0 в качестве пробной найдем, что

$$J = \int_{\Pi_\tau} |\nabla_x w|^2 dxdt < -k^2 \dot{J}.$$

И отсюда, что $w(x,t) = o(e^{-k^{-2}t})$ при $t \to \infty$.

Формулировка теоремы

Теорема *Пусть $u(x,t)$ положительное в Π_0 решение уравнения*

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + f(u), \tag{3}$$

удовлетворяющее условию Неймана (2), и выполнено Условие F

Тогда

$$u(x,t) = \beta(t+\tau_0) + O(e^{-\alpha t}), \qquad \text{при } t \to \infty$$

где $\alpha = const > 0$ не зависит от $u(x,t)$, $\tau_0 = const$ зависит от $u(x,t)$.

Условие F1 : $f(0) = 0$, $f(u) > 0$, $\frac{f(u)}{u}$ убывает по u и $\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$ $\frac{f(\beta(t))}{\beta(t)} = o(t^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ при $t \to \infty$, $\varepsilon > 0$

Условие F2 : $f(0) = 0$, $f(u) > 0$, $f'(u)$ непрерывно при $u > u_0$, $\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$, и $\frac{f'(\beta)f(\beta(t))}{\beta(t)} = o(t^{-1-\varepsilon})$ при $t \to \infty$ $\varepsilon > 0$

С П А С И Б О

З А

В Н И М А Н И Е !

Список литературы

[1] *В. В. Чистяков* О свойствах решений полулинейных параболических уравнений второго порядка, Труды семинара имени И.Г.Петровского, вып. 15 (1991), стр. 70-107

[2] *В. А. Кондратьев* О решениях нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях, Фундамент. и прикл. матем., 2:3 (1996), 863–874

[3] *Filimonova I.V.* Asymptotic Behaviour of Positive Solutions of a Semilinear Parabolic Equation, Russian Journal of Mathematical Physics, vol 10, № 2, 2003, pp. 234-237

[4] *Theodore K. Boni* On the asymptotic behavior of solutions for some semilinear parabolic and elliptic equations of second order with nonlinear boundary conditions, Nonlinear analysis, 45 (2001) 895-908

[5] *Филимонова И.В.* О поведении решений полулинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелиней-

ному краевому условию, в цилиндрической области, Труды семинара им. И. Г. Петровского, **26**, (2007), 369–390.

[6] *Кондратьев В.А.* Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических уравнений второго порядка, Труды МИАН, **260**, (2008), 180–192

[7] *Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник* Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях, Матем. сб., 189:3 (1998), 45–68;

[8] *А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник* Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН, 17:3(105) (1962), 3–146