Импульсное уравнение теплопроводности с инфинитезимальным переходным слоем Вольтерры

Сергей Александрович Саженков
(ИГиЛ СО РАН, НГУ, АлтГУ)

Вторая конференция математических центров
Москва, 7-11 ноября 2022

Synopsis

- Изучается задача Коши с периодическими начальными данными для уравнения теплопроводности, содержащего нелокальное по времени младшее интегральное слагаемое, которое моделирует эффект затухающей памяти.
- Интеграл имеет форму свёртки, в которой ядро зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ и слабо* сходится к дельта-функции Дирака при $\varepsilon \to 0$, сконцентрированной в некоторый момент времени $t = \tau$.
- При фиксированных значениях $\varepsilon > 0$ слабое решение задачи существует и единственно. Это гарантируется известными результатами.
- В настоящей работе на строгом математическом уровне проводится обоснование предельного перехода в задаче при $\varepsilon \to 0$ к *импульсному* уравнению теплопроводности.

- Результатом предельного перехода является формулировка предельной корректной начально-краевой задачи для «двухмасштабной» системы уравнений, в которой величина мгновенного импульса определяется посредством решения подзадачи в переходном слое, поставленной на микроскопической («очень быстрой») шкале времени.

Исследование проведено в соавторстве с *Иваном Владимировичем Кузнецовым* (ИГиЛ СО РАН, НГУ) и опубликовано в совместной статье

- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov,* The impulsive heat equation with the Volterra transition layer, *J. of Elliptic and Parabolic Equat.*, 2022, vol. 8, no. 2, pp. 959–993 (published online 10 September 2022).

Предисловие

Параболическое интегро-дифф. уравнение Вольтерра

Доклад посвящён асимптотическому анализу семейства $\{u = u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ решений уравнения

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \Delta_x u(\mathbf{x}, t) + \int\limits_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, s))\, ds \quad \text{in } \Pi_T, \qquad (1)$$

при $\varepsilon \to 0+$, где

$$\operatorname{supp} K_\varepsilon^\tau(\cdot) \in [\tau, \tau+\varepsilon], \quad K_\varepsilon^\tau(\cdot) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \delta_{(\cdot\,=\tau+0)} \text{ слабо}^\star \text{ в } \mathcal{M}(0, T).$$

Здесь,

$\Pi_T = \mathbb{R}_x^d \times (0, T)$;

$T > 0$ и $\tau = \mathrm{const} \in (0, T)$ — это два фиксир. момента времени;

Δ_x — лапласиан; β — заданная вещественная функция;

$\delta_{(\cdot\,=\tau+0)}$ — односторонняя дельта-функция Дирака;

$\mathcal{M}(0, T)$ — пространство мер Радона на отрезке $[0, T]$.

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \Delta_x u(\mathbf{x}, t) + \int\limits_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, s))\, ds \quad \text{in } \Pi_T, \tag{1}$$

Уравнение (1) вытекает из системы, состоящей из УЧП и ОДУ,

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \Delta_x u(\mathbf{x}, t) + K_\varepsilon^\tau(t) V(\mathbf{x}, t), \tag{2a}$$

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}, t) = K_\varepsilon^\tau(t) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, t)), \tag{2b}$$

моделирующей управление с обратной связью (feedback control system), в котором *функция управления* V определяется по *переменной состояния и* через неявный механизм управления (выражаемый ОДУ (2b)).

$$
\begin{cases}
\partial_t u(\mathbf{x},t) = \Delta_x u(\mathbf{x},t) + K_\varepsilon^\tau(t) V(\mathbf{x},t), \\
\dfrac{d}{dt} V(\mathbf{x},t) = K_\varepsilon^\tau(t) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x},t)).
\end{cases} \tag{2}
$$

- В терминах теории оптимального управления, отображение $(\mathbf{x}, t, u) \mapsto K_\varepsilon^\tau(t)\beta(\mathbf{x}, u)$ — это *характеристическая функция* механизма управления и переменная состояния u играет роль *сигнала обратной связи (feedback signal)*.
- С физической точки зрения, u может быть, например, температурой или концентрацией вещества.
- Присутствие ядра $K_\varepsilon^\tau(\cdot)$ в системе (2) и, соответственно, в уравнении (1), отражает обстоятельство, что управление является очень интенсивным и очень коротким по продолжительности. Поэтому его можно считать *немгновенным импульсным* управлением.

Постановка задачи Коши. Разрешимость

Задача Коши для параб. уравнения Вольтерры

Предполагаем, что $\beta = \beta(\mathbf{x}, u)$ — достаточно гладкая сублинейная 1-периодическая по $\mathbf{x}$ функция и ядро K_ε^τ имеет вид

$$K_\varepsilon^\tau(t) := \frac{2}{\varepsilon} K\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) \theta(t-\tau),$$

где $K = K(\vartheta)$ — стандартное ядро регуляризации Фридрихса («шапочка»), $\operatorname{supp} K \subset [-1, 1]$; $\quad \theta(\vartheta) = \mathbf{1}_{\vartheta \geqslant 0}$ — функция Хевисайда.

Требуется найти $u = u(\mathbf{x}, t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u + \displaystyle\int_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, s))\, ds \quad \text{в } \mathbb{R}_x^d \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^d, \quad \text{где } u_0 \in H^{1,p}, \\ u(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) = u(\mathbf{x}, t) \quad \text{при } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_x^d \times (0, T),\ i = 1, \dots, d. \end{cases} \tag{3}$$

Определение слабого энергетического решения

Функция $u = u(\mathbf{x}, t)$ называется *слабым энергетическим решением* задачи (3) если

(i) $u \in C([0, T]; H^{1,p})$, $\partial_t u \in L^\infty(0, T; H^{-1,p})$,

(ii) u удовлетворяет интегральному равенству

$$\int\limits_{Q_T} \left[-u\,\partial_t\zeta + \nabla_x u \cdot \nabla_x \zeta - \left(\int\limits_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, s))\, ds \right) \zeta \right] d\mathbf{x}dt - \int\limits_\Omega u_0(\mathbf{x})\zeta(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x} = 0 \quad (4)$$

для всех гладких 1-периодических по $\mathbf{x}$ функций $\zeta = \zeta(\mathbf{x}, t)$, обращающихся в нуль в окрестности $\{t = T\}$.

Здесь обозначено: $Q_T := \Omega \times (0, T)$, где $\Omega = (0, 1)^d$;

$H^{1,p} \subset W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d_x)$, $H^{-1,p} \subset W^{-1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d_x)$, $L^p \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^d_x)$ — банаховы пространства 1-периодических по $\mathbf{x}$ функций.

Разрешимость при фиксированном $\varepsilon > 0$

Согласно известной теории

(Heard, M.L., Rankin III, S.M., *J. Math. Anal. Appl.* (1989), vol. 139),

при любой заданной начальной функции

$$u_0 \in H^{1,p}, \quad \frac{d}{2} < p < +\infty,$$

при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $\quad$ ($\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало) существует единственное слабое энергетическое решение задачи (3).

Дополнительное предположение: принцип максимума

Далее считаем, что $p > d$.

Тогда по теореме вложения Соболева получаем, что

$$u_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T]) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

причём оценка максимума равномерна по ε.

Основные результаты

Главные результаты работы состоят в следующем.

Теорема 1. (Предельный переход при $\varepsilon \to 0$.)

Пусть выполняются поставленные выше условия на u_0, K_ε^τ и β.

Пусть $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — это семейство слабых энергетич. решений задачи (3).

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. (Относит. компактность семейства $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$.)

Существуют подпосл. из $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ и предельная функция $u \in L^\infty(0,T;L^\infty) \cap L^2(0,T;H^{1,2})$, такие, что

$$u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} u \quad \begin{array}{l} \text{сильно в } L^2(0,T;L^2), \text{ слабо}^\star \text{ в } L^\infty(0,T;L^\infty), \\ \text{слабо в } L^2(0,T;H^{1,2}). \end{array} \tag{5}$$

2. (Относительная компактность семейства ремасштабированных решений.)

Семейство ремасштабированных решений $\{\bar{u}_\varepsilon : \mathbb{R}^d_x \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}\}$, определённых формулой

$$\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \bar{t}) \stackrel{\text{def}}{=} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau + \varepsilon \bar{t}), \quad \bar{t} \in [0,1], \quad \varepsilon > 0,$$

относительно компактно в $L^2(0,1;L^2)$.

Более точно, существуют подпоследовательность из $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ и предельная функция $\bar{u} \in L^\infty(0,1;L^\infty)$, такие, что

$$\bar{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} \bar{u} \quad \text{сильно в } L^2(0,1;L^2). \tag{6}$$

Примечание.

Как видно, ремасштабирование происходит на интервале времени $\{\tau \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\}$, *то есть на носителе функции* $K^\tau_\varepsilon = K^\tau_\varepsilon(t)$.

3. (Предельная модель.)

Пара предельных функций $(u, \bar{u})$ служит *сильным* решением следующей задачи Коши:

$$
\begin{cases}
\partial_t u = \Delta_x u, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d_x \times \big((0, T) \setminus \{t = \tau\}\big), \\
\partial_{\bar{t}} \bar{u} = \int\limits_0^{\bar{t}} 4K(\bar{t})K(\bar{s})\beta(\mathbf{x}, \bar{u}(\mathbf{x}, \bar{s}))\, d\bar{s}, \quad (\mathbf{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^d_x \times (0, 1), \\
u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\
\bar{u}(\mathbf{x}, 0+) = u(\mathbf{x}, \tau - 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\
u(\mathbf{x}, \tau + 0) = \bar{u}(\mathbf{x}, 1 - 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\
u(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) = u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d_x \times \big((0, T) \setminus \{t = \tau\}\big), \\
\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, \bar{t}) = \bar{u}(\mathbf{x}, \bar{t}), \quad (\mathbf{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^d_x \times (0, 1).
\end{cases}
\tag{7}
$$

Замечание 1.

- Уравнение теплопроводности (7)$_1$ выполняется в классическом смысле на $\mathbb{R}^d_x \times (0, \tau)$ и п.в. в $\mathbb{R}^d_x \times (\tau, T)$.
- Уравнение Вольтерры (7)$_2$ выполняется п.в. в $\mathbb{R}^d_x \times (0, 1)$.
- Начальное условие (7)$_3$ выполняется в классическом смысле.
- Условия согласования («сшивки») (7)$_4$ и (7)$_5$ выполняются в смысле сильных следов в L^1.
- Условия периодичности (7)$_6$ и (7)$_7$ выполняются п.в. в соответствующих областях.

Замечание 2.

Множество $\mathbb{R}^d_x \times \{0 < \bar{t} < 1\}$ называем *ударным* или *переходным слоем*. Переменная $\bar{t}$ — это микроскопическая («очень быстрая») переменная времени.

Теорема 2. (Единственность предела.)

Задача (7) имеет не более одного сильного решения.

То есть, ввиду теоремы 1, сильное решение $(u, \bar{u})$ задачи (7) единственно.

Замечание 2.

Поскольку решение $(u, \bar{u})$ задачи (7) единственно, заключаем, что **всё** семейство $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ решений задачи (3) сходится к сильному решению задачи (7) в смысле предельных соотношений (5) и (6), и поэтому нет необходимости выбирать подпослед-сть из $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0+}$.

О доказательстве теоремы единственности

Замечаем, что задача (7) — это система, состоящая из трёх подзадач, которые нужно решить последовательно.

- Сначала в слое $\mathbb{R}^d_x \times (0, \tau)$ решается задача Коши

$$\partial_t u = \Delta_x u, \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) = u(\mathbf{x}, t). \qquad (7)_{1,3,6}$$

- Затем в слое $\mathbb{R}^d_x \times \{0 < \bar{t} < 1\}$ решается задача Коши

$$\begin{gathered} \partial_{\bar{t}} \bar{u} = \int\limits_0^{\bar{t}} 4K(\bar{t})K(\bar{s})\beta(\mathbf{x}, \bar{u}(\mathbf{x}, \bar{s}))\, d\bar{s}, \\ \bar{u}(\mathbf{x}, 0+) = u(\mathbf{x}, \tau - 0), \quad \bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, \bar{t}) = \bar{u}(\mathbf{x}, \bar{t}). \end{gathered} \qquad (7)_{2,4,7}$$

- Наконец, в слое $\mathbb{R}^d_x \times (\tau, T)$ решается задача Коши

$$\partial_t u = \Delta_x u, \quad u(\mathbf{x}, \tau + 0) = \bar{u}(\mathbf{x}, 1 - 0), \quad u(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) = u(\mathbf{x}, t). \qquad (7)_{1,5,6}$$

Для каждой из этих подзадач имеем следующее:

- В слое $\mathbb{R}^d_x \times (0, \tau)$ и в слое $\mathbb{R}^d_x \times (\tau, T)$ единственность решения задач Коши следует из хорошо известной теории уравнения теплопроводности.
- К слову, вспомним, что в слое $\mathbb{R}^d_x \times (0, \tau)$ решение имеет явное представление

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} u_0(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

- В слое $\mathbb{R}^d_x \times \{0 < \bar{t} < 1\}$ единственность решения задачи Коши доказывается стандартным методом в силу ограниченности u (т.е. принципа максимума), гладкости ядра K и гладкости (по $\mathbf{x}$ и t) и сублинейности (по u) функции $\beta = \beta(\mathbf{x}, u)$ с помощью леммы Гронуолла – Беллмана.

О доказательстве теоремы 1

Напомним:

$$\partial_t u = \Delta_x u + \int\limits_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, s))\, ds \qquad (3)_1$$

- Устанавливаются энергетическая оценка и принцип максимума для семейства решений уравнения $(3)_1$ в $\mathbb{R}_x^d \times (0, T)$.
- Проводится рескейлинг $(3)_1$ на сегменте $\{\tau \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\}$. При этом, очевидно, принцип максимума сохраняется.
- Из полученных оценок, при подходящем выборе подпоследовательности следуют слабые предельные соотношения

$$u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} u \text{ слабо}^\star \text{ в } L^\infty(0, T; L^\infty), \text{ слабо в } L^2(0, T; H^{1,2}) \qquad (5)_{2,3}$$

и

$$\bar{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} \bar{u} \quad \text{слабо}^\star \text{ в } L^\infty(0, 1; L^\infty) \qquad (6_{weak})$$

- Устанавливается равностепенная непрерывность семейств $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ и $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ по $\mathbf{x}$ и t (соотв., по $\bar{t}$).

  При этом систематически используется техника, разработанная С.Н. Антонцевым и С.И. Шмарёвым (монография 2015 г., Atlantis Press).
- В силу свойств равностепенной непрерывности и принципа максимума на основании теоремы Колмогорова – Рисса (версия критерия Арцела – Асколи) выводим сильные предельные соотношения

$$u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в } L^2(0,T;L^2) \tag{5$_1$}$$

  и

$$\bar{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \bar{u} \quad \text{сильно в } L^2(0,1;L^2), \tag{6}$$

  переходя, при необходимости, к подпоследовательности.
- Завершаем доказательство предельным переходом при $\varepsilon \to 0+$ в уравнении и краевых условиях задачи (3), более точно, в интегральном равенстве (4). $\square$

Related Topics

Аналогичные по целям исследования были проведены также для $p(x)$-параболического, истинно-нелинейного ультра-параболического и псевдо-параболического уравнений:

- *S. N. Antontsev, I. V. Kuznetsov, and S. A. Sazhenkov,* A shock layer arising as the source term collapses in the $p(x)$-Laplacian equation, *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2020, **9(27)**(3), 31–53. (doi:10.15393/j3.art.2020.8990)
- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov,* Singular limits of the quasi-linear Kolmogorov-type equation with a source term, *J. Hyperbolic Differential Equations*, 2021, **18**(4), 789–856. (doi:10.1142/S0219891621500247)
- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov,* Strong solutions of impulsive pseudoparabolic equations, *Nonlinear Anal.: Real World Applications*, 2022, **65**, article 103509, 1–19. (doi:10.1016/j.nonrwa.2022.103509)