

ОБ УСЛОВИЯХ МОНОГЕННОСТИ

Д.С. Теляковский (Москва)

Если функция комплексного переменного $f(z)$ имеет конечную производную в каждой точке области, то $f(z)$ аналитична в этой области. В этом утверждении достаточно предполагать не существование у $f(z)$ “настоящей” производной в точках области, а выполнения более слабых условий комплексной дифференцируемости, например, существования у $f(z)$ производной в точке ζ при $z \rightarrow \zeta$ вдоль множества E_ζ определённого вида. Для условий Коши–Римана, например, множества E_ζ состоят из пересекающихся в ζ интервалов, параллельных осям координат. Примеры показывают, что для получения достаточного условия аналитичности обычно требуется накладывать на $f(z)$ дополнительные метрические условия, зависящие от вида множеств E_ζ .

Доказана аналитичность $f(z)$, если при сохранении полученных ранее метрических условий, предполагать, что в точках ζ относительно множеств E_ζ функция $f(z)$ не дифференцируема, а удовлетворяет условию Липшица, т.е. найдётся $L_\zeta > 0$ для которого $|f(z) - f(\zeta)| \leq L_\zeta |z - \zeta|$ при каждом $z \in E_\zeta$ и, кроме того, $f(z)$ имеет в ζ производную вдоль некоторой последовательности точек $z_n \rightarrow \zeta$, имеющей в ζ два неколлинеарных касательных направления. Примеры показывают, что ни условие Липшица, ни метрические условия на $f(z)$ существенно ослаблены быть не могут.