

Корневой группой. (Горюх, Хини, Серганова)

Корневой группой (Горюх, Хини, С.)

• Напоминание. Полупростая конечномерная алгебра $\mathfrak{L}$ задается образующими и соотношениями, кодируемая матрицей Картана.

Обобщение: алгебры Каца-Муджи. X конечное множество (Кас)

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ векторное пр-во, $a: X \rightarrow \mathfrak{g}$ ^{к-корни}, матрица Картана
 $b: X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ^{корни}, $a_{xy} = \langle a(x), b(y) \rangle$

$\mathfrak{g}$ порождена $\{e_x, f_x \mid x \in X\}$ and $\mathfrak{g}$

$$(*) \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0,$$

$$[h, e_x] = \langle h, b(x) \rangle e_x$$

$$[h, f_x] = -\langle h, b(x) \rangle f_x$$

$$[e_x, f_y] = \delta_{x,y} a(x)$$

Chevalley

$$(**) \quad \nexists \frac{2a_{xy}}{a_{xx}} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \text{ and } a_{xx} \neq 0$$

$$\text{ad}^{1-2a_{xy}/a_{xx}} e_x (e_y) = 0$$

$$\text{ad}^{1-2a_{xy}/a_{xx}} f_x (f_y) = 0 \quad \text{Serre's}$$

$\tilde{g}$ факторизована по (*)

Кас $g_K = \tilde{g} / \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r}$ максимальный идеал $\mathfrak{r} \cap f = 0$

Moody $g_M = \tilde{g} / (**)$

Gabber - Кас: Для симметризуемой A , $g_K = g_M$.

Неизвестно когда $g_K = g_M$?

формула

алгебры KM

$$\begin{aligned} \text{acc} &= 2 \\ a_{ij} &\in \mathbb{Z} \leq 0 \end{aligned}$$

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ji} \neq 0$$

Суперматрицы:

• Несколько разных матриц Картана

• Нули на диагоналях

Пример. $sl(1|2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Не все борелевские подматрицы сопряжены.
Не хватает соотношений Серра.

Цели:

- Построить группой обобщающий группу Вейля
- Получить все соотношения Серра
- Что такое Кокеторов группой?

$$A \mapsto \mathcal{D} A$$

$$\begin{array}{c|cc} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline * & 0 & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}$$

↖ нечётные
↙ отражения

Группоид — это категория, где все морфизмы обратимы.

Определение коркового группоида: X — конечное множество

Объекты (вершины) $v = (f, a, b, p)$ ← корковые данные (асу)

f — векторное пр-во, $a: X \rightarrow f$, $b: X \rightarrow f^*$, $p: X \rightarrow \mathbb{Z}_2$

Морфизмы (стрелки): образующие трёх типов

- 1) Отражение: $\gamma_x: (f, a, b, p) \rightarrow (f, a', b', p')$, $x \in X$.
- 2) Автоморфизм: $\dagger_\theta: (f, a, b, p) \rightarrow (f', a', b', p)$, where $\theta: f \xrightarrow{\sim} f'$,
 $a' = \theta \circ a$, $b' = (\theta^*)^{-1} \circ b$.
 $f \xrightarrow{\sim} f'$
- 3) Гомометрия: $\lambda: X \rightarrow \mathbb{C}^*$, $h_\lambda: (f, a, b, p) \rightarrow (f, a', b, p)$,
 $a'(x) = \lambda(x) a(x)$.

Подробнее об отражениях: $x \in X$ reflectable (отразим?) в

вершине v если изотропный отражения

(1) $a_{xx} = 0$, $p(x) = 1$

(2) $a_{xx} \neq 0$, $p(x) = 0$, $\frac{2a_{xy}}{a_{xx}} \in \mathbb{Z} \leq 0 \quad \forall y \neq x$

(3) $a_{xx} \neq 0$, $p(x) = 1$, $\frac{a_{xy}}{a_{xx}} \in \mathbb{Z} \leq 0 \quad \forall y \neq x$

(2), (3) анизотропное отражение

$a'(y) := a(y) - 2 \frac{a_{yx}}{a_{xx}} a(x)$;

$b'(y) = b(y) - 2 \frac{a_{xy}}{a_{xx}} b(x)$; $p'(y) = p(y)$

(1) изотропное отражение

$(a'(y), b'(y), p'(y)) = \begin{cases} (-a(x), -b(x), p(x)) & \text{если } x = y \\ (a(y), b(y), p(y)) & \text{если } x \neq y, \underline{a_{xy} = 0} \\ (a(y) + \frac{a_{yx}}{a_{xy}} a(x), b(y) + b(x), 1 + p(y)) & \text{если } x \neq y, \underline{a_{xy} \neq 0} \end{cases}$

$f \xrightarrow{\text{id}} f$

- Замечания: 1) $\tau_x \cdot \tau_x = 1$ $v \xrightleftharpoons{\tau_x} v'$.
- 2) Таблицевые морфизмы и анизотропные отражения не меняют матрицу Картана.
- 3) При гомотетии матрица Картана домножается слева на диагональную матрицу.
- 4) При отражении симметричная матрица Картана остаётся симметричной.

Соотношения: Два морфизма $(f, a, b, p) \xrightarrow{\alpha} (f', a', b', p')$ равны если они индуцируют одно и то же β линейное отображение $f \rightarrow f'$.

Группоид $\mathcal{R}$ имеет много связанных компонент, мы будем рассматривать какую-нибудь одну $\mathcal{R}_0$.

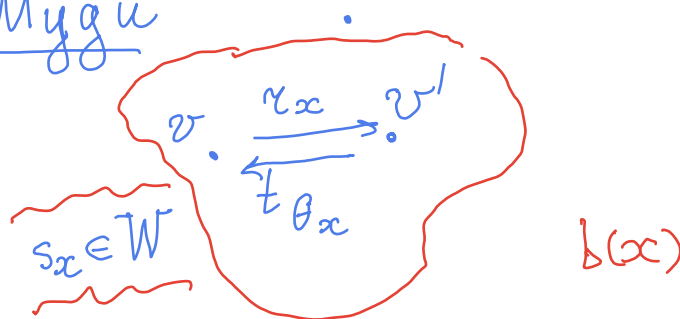
Примеры: Простые конечномерные алгебры

v вершина $\text{Aut}_{\mathcal{R}}(v) \cong W$ группа Вейля

$a: X \rightarrow \mathcal{f}$ простые
 $b: X \rightarrow \mathcal{f}^*$ корки
 простые корни

Любая алгебра Кэли-Муги

$W \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{R}}(v)$
 $x \in X$



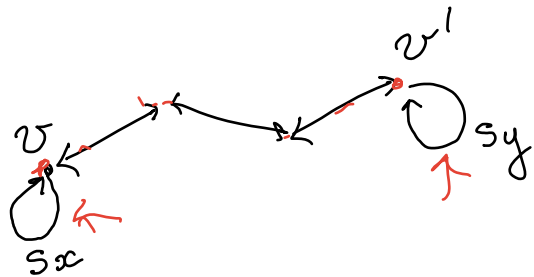
$$\theta_x(h) = h^{-\frac{2\langle h, b(x) \rangle}{\langle a(x), b(x) \rangle}} a(x)$$

$\text{Aut}_{\mathcal{R}}(v) = W \times K$, where $K = \{ \theta: \mathcal{f} \rightarrow \mathcal{f} \mid \theta a(x) = a(x), \theta^* b(x) = b(x) \}$
 $x \in X$

$s_x \in \text{Aut}_{\mathcal{R}}(v)$

x анзотропный
 отражаемый

В суперматрице: Sx для отраженного x
аннуляторного



We can define $W \subset \text{Aut}_{\mathcal{R}}(v)$.

Простой пример: $GL(1|1)$, $X = \{x\}$, $A = (0)$ [0]

$$v = (f, a, b, 1)$$

$$\begin{matrix} \downarrow \uparrow t^{-1} \\ v' = (f, -a, -b, 1) \end{matrix}$$

$$\text{Aut}_{\mathcal{R}}(v) \simeq \mathbb{Z}_2 \times K$$

$$\dim f = 2 \quad \langle a, b \rangle = 0$$

$$\mathbb{Z}_2 = \langle s \rangle$$

$$K = \{ \theta \in \text{Aut } f \mid \theta(a) = \lambda a, \theta^*(b) = b \}$$

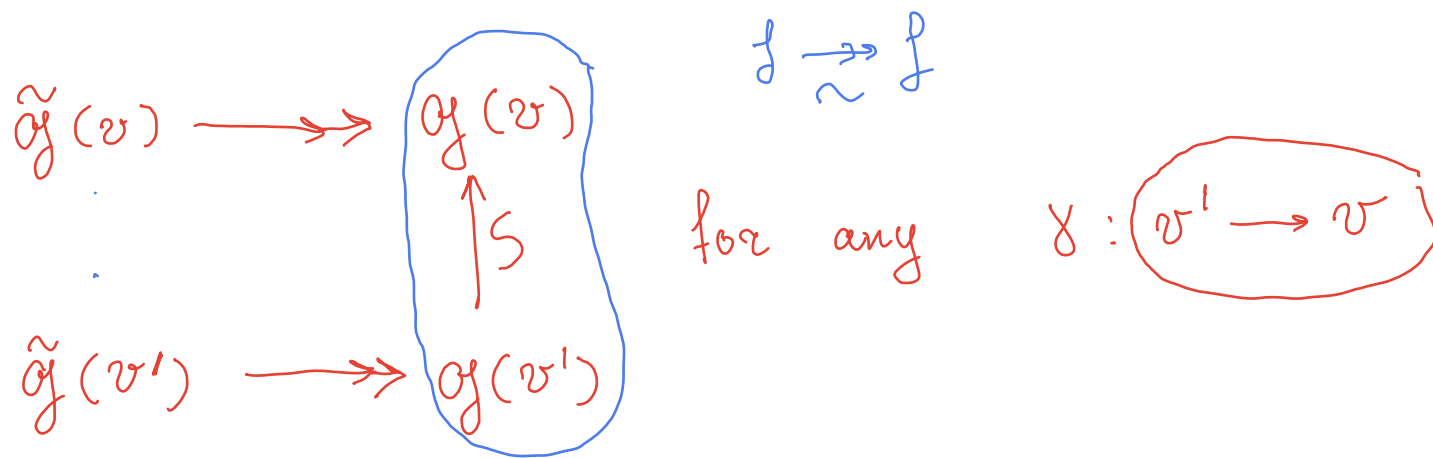
$$\underline{t_1 \circ \tau = s}$$

$$p(x) = 1$$

Как построить супералгебру $\mathcal{L}_u$?

$v \in \mathcal{R}_0$, построим $\tilde{\mathcal{G}}(v)$, $\langle f, \underline{e_x}, \underline{f_x} \mid x \in X \rangle / (*)$

Определение. Корневая алгебра $\mathcal{G}$ с коэффициентами на $\mathcal{R}_0$



Мы называем $\mathcal{R}_0$ допустимым если существует хотя бы одна корневая алгебра с коэффициентами $\mathcal{R}_0$.

$\forall \mathcal{R}_0$ слабо симметризуемый если для каждой $v \in \mathcal{R}$ и образующего $x \in X$ $\underline{axx} = 0 \Rightarrow \underline{ayx} = 0$.

Теорема 1. R_0 допустим тогда и только тогда когда он слабо симметричен.

Теорема 2. Среди всех корневых алгебр с косинетелем не допустимые R_0 существуют канонич. и канонич. объекты

$\mathfrak{g}^U$ и $\mathfrak{g}^{KM}$, то есть любая корн. алг. задается

$$\mathfrak{g}^U \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^{KM}.$$

В случае обычной КМ (симметризированной A) $\mathfrak{g}^U \cong \mathfrak{g}^{KM}$.

Примеры: $\mathfrak{g}^U \neq \mathfrak{g}^{KM}$

$$\mathfrak{gl}(1|1) = \mathfrak{g}^{KM}$$

$$X = \{x\}$$

$$\mathfrak{gl}(1|1)$$

$$\mathfrak{g}^{KM} = \mathfrak{g}^U / (e^2, f^2)$$

$$\langle a, d \rangle = f$$

$$[a, d] = 0$$

$$[e, f] = a, [a, e] = 0, [a, f] = 0$$

$$[d, e] = e$$

$$[d, f] = -f$$

$$\mathfrak{g}^U = \text{Span} \{e, e^2, a, d, f, f^2\}$$

$$4|2$$

$$e^2 = \frac{1}{2}[e, e]$$

$$\mathfrak{g}^U = \mathfrak{sl}(n|n) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}t \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mathfrak{sl}(n|n) \text{ has center, } c = \begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{g}^{KM} = \mathfrak{g}^U / \langle c \otimes t^k \mid k \neq 0 \rangle$$

асимметричная алгебра

$$\dim f = 2 \quad (e^2 = 0)$$

Классификация (С. Нойт)

Допустимые (неразрывные) конпокекты, все x ~~отраженные~~ ^{отражаемые} во всех вершинах, и есть хотя бы одно цотропное ~~отражаемое~~ ^{отражаемое}.

(1) Простые конпокекты (Kac). basic

(2) Аварные, и их деформации. (Конечного роста).

(3). $|X| = 3$ Indefinite $Q(a, b, c)$ se(1|2).

$$g^b \approx g^{km}$$

В случаях (1) и (2) мы можем описать все корневые суперматрицы.

Коксетерность.

мы можем определить группу Вейля $W \subset \text{Aut}_R(v)$ для любого гомустимого R_0 .

Теорема. Группа Вейля любого гомустимого R_0 Коксетерова.

W порождена $s_1, \dots, s_m$ $s_i^2 = 1, (s_i s_j)^p = 1$.

Скетч:

$v \in R_0$,

$S_k(v) = \{ v' \in R_0 \mid v \xrightarrow{\sigma} v', \sigma \text{ композиция} \}$
отражений

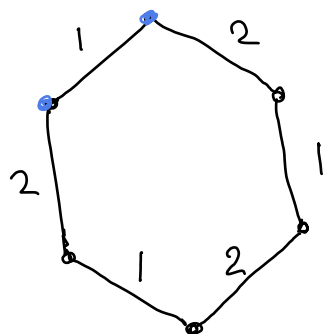
Морфизмы порождены отражениями.

$S_k(v)$ стягиваем.

Маркированный граф

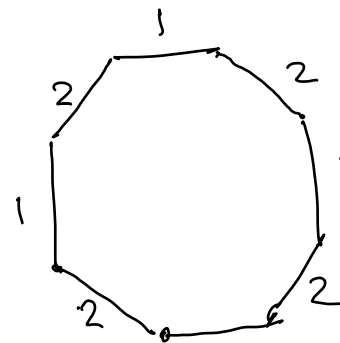
$sl(1/2)$

$sl(3)$



$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$$

$so(5)$
 $sp(4)$
 $osp(3/2)$



$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1$$

Граф Коксетеров если любые два пути с тем же началом и концом переводятся в один путь Коксетеровыми

подписками

$$\alpha_x \alpha_y \alpha_x \alpha_y \dots \alpha_x = \alpha_y \alpha_x \dots \alpha_y$$

$$\alpha^2 = 1$$

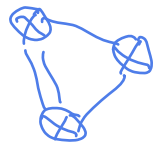
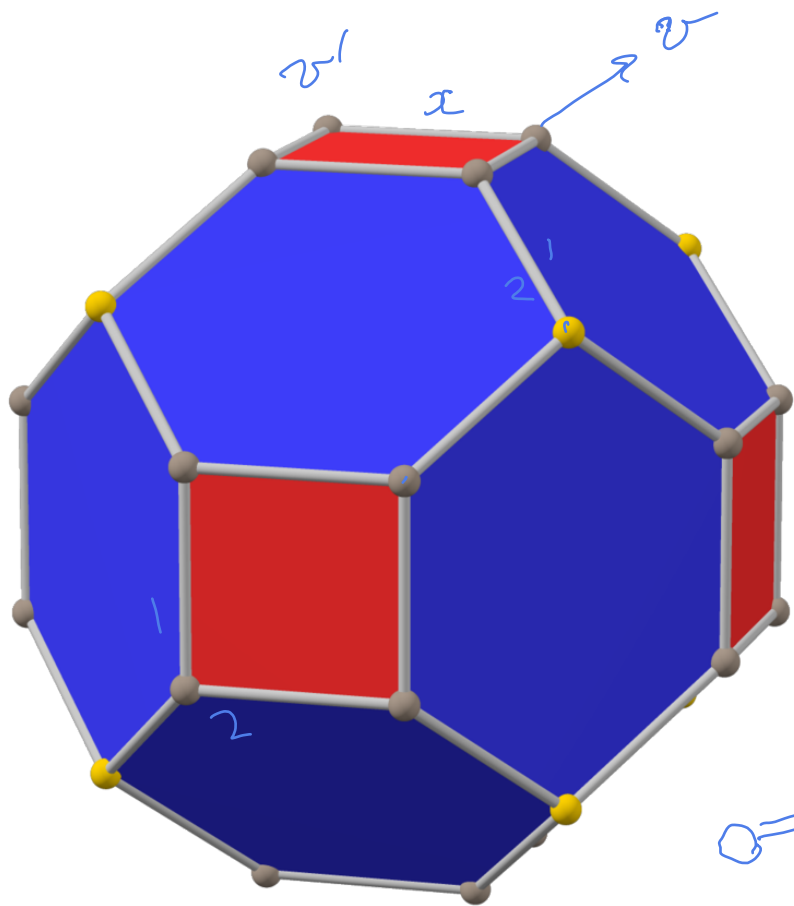
Теорема.. У любого допустимого R_0 скелет Коксетера.

. Рассмотрим решетку корней $Q = \sum_{\alpha \in X} b(\alpha)$, и $Q \otimes \mathbb{R} = Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
Существует ~~выуклой~~ многогранник P с вершинами в Q

и отображение $\lambda: Sk(v_0) \rightarrow P$
так что λ устанавливает биекцию между объектами $Sk(v_0)$ и вершинами P . Все ограниченные рёбра P соответствуют отражениям

$$\lambda(v) - \lambda(v') = b(\alpha)$$

$$v \xrightarrow{\alpha} v'$$



$b(x)$

$osp(4|2)$

$\mathbb{D}(2,1;1)$

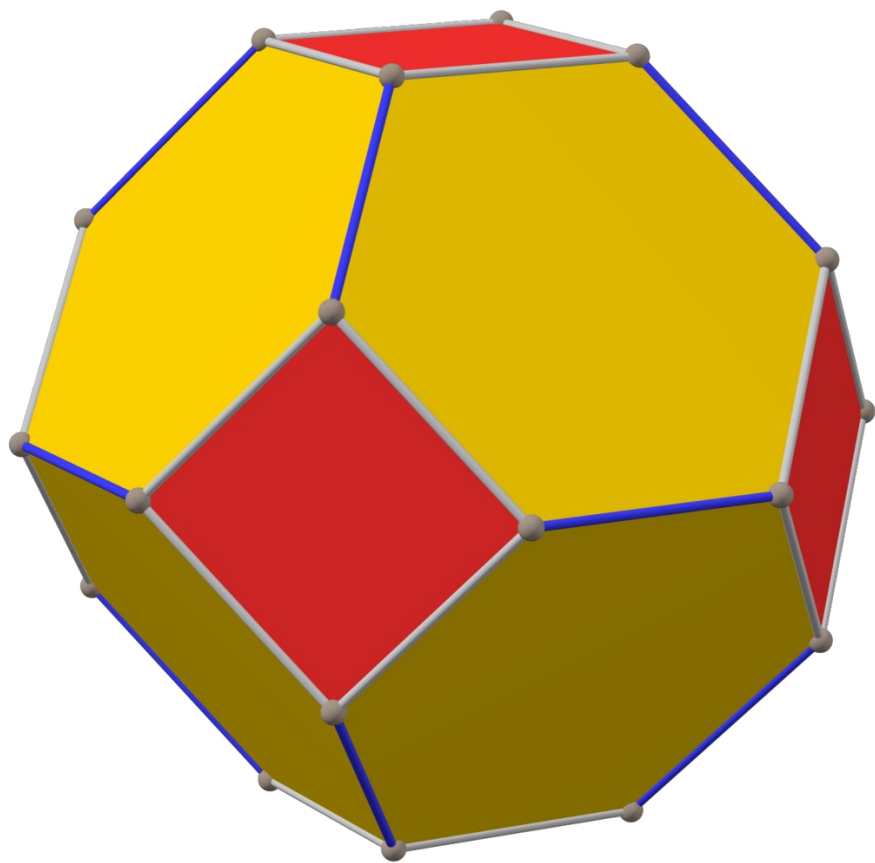
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$|X|=3$



$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$$



периметр

$se(4)$

$se(13)$

