

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 10. Условные математические ожидания. Инструменты. Матричная полугруппа

Теретёнков Александр Евгеньевич

22 ноября 2022 г.

В прошлой серии...

Представление Стайнспринга

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_{R'} U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger$$

$$(U|i \otimes 1\rangle = \sum_{l=1}^{n'} W_l|i \otimes l\rangle)$$

Достроим набор ортонормированных векторов до ортонормированного базиса

$$U = \begin{pmatrix} W_1 & \dots \\ \vdots & \\ W_{n'} & \dots \end{pmatrix}$$
$$U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = \begin{pmatrix} W_1 \rho W_1^\dagger & \dots \\ \vdots & \\ W_{n'} \rho W_{n'}^\dagger & \dots & W_{n'} \rho W_{n'}^\dagger \end{pmatrix}$$

Примеры вполне положительных отображений

Унитарное отображение U_i с вероятностью p_i , тогда

$$\Phi(\rho) = \mathbb{E} U \rho U^\dagger = \sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger$$

Φ — унитарный канал. ($W_i = \sqrt{p_i} U_i$)

Примеры вполне положительных отображений

Упражнение. Пусть

$$\Phi(\rho) = \sum_{ij} P_{ij} |i\rangle \langle j| \rho |j\rangle \langle i|,$$

тогда вполне-положительное, если P матрица с неотрицательными коэффициентами, квантовый канал, если P — стохастическая, унитарный канал, если P — бистохастическая.

Условные математические ожидания

Вполне положительный идемпотент $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ называется условным математическим ожиданием.

Примеры:

1

$$\mathcal{P}\rho = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

Π_x — ортогональное разложение единицы.

2

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$$

$$\mathcal{P}\rho = \text{Tr}_R \rho \otimes \rho_\beta$$

Наблюдаемые

Чёткие наблюдаемые:

Пусть $X^\dagger = X$ — чёткая наблюдаемая

$$X = \sum_x x \Pi_x, \quad \Pi_x \Pi_y = \delta_{xy} \Pi_x$$

Заметим, что отображения

$$\Phi_x(\rho) = \Pi_x \rho \Pi_x$$

являются вполне положительными и $\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho$, а

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

является каналом.

(В частности, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iXt} \rho e^{iXt} dt = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$.)

Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство $(\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho)$ вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\text{Tr } \Phi_x(\rho)$$

Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство $(\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho)$ вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\text{Tr } \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\text{Tr } \Phi_x(\rho)}$$

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство ($\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho$) вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\text{Tr } \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\text{Tr } \Phi_x(\rho)}$$

В результате неселективного в состоянии

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Phi_x(\rho)$$

Отметим, что вероятности $\text{Tr } \Phi_x(\rho) = \text{Tr } \Phi_x^*(I_n)\rho$ зависят от величины $M_x = \Phi_x^*(I_n)$, поэтому обычно говорят, что M_x задают (нечёткую) наблюдаемую (разложение единицы $\sum_x M_x = I$, $M_x = M_x^\dagger \geq 0$).

Одна и та же наблюдаемая может быть измерена различными инструментами, приводящими к различным апостериорным состояниям.

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geq \dots \geq t_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_S X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} (\dots X^{(1)} \Phi_{t_1} (X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \dots) Y^{(N)} \end{aligned}$$

Переобозначим

$$\mathcal{C}^{(k)}(\rho) = X^{(k)} \rho Y^{(k)}$$

Тогда можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_S \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \dots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho \end{aligned}$$

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

С другой стороны, если бы мы считали соответствующее среднее мы считали в случае унитарной динамики $\mathcal{U}_t$ системы и резервуара:

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_{S+R}(\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N-t_{N-1}} \dots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_S \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N-t_{N-1}} \dots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho = \\ & = \text{Tr}_{S+R}(\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N-t_{N-1}} \dots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R \end{aligned}$$

Упражнение. Эквивалентно, для любых вполне положительных отображений $\mathcal{E}^{(k)}$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_S \mathcal{E}^{(N)} \Phi_{t_N-t_{N-1}} \dots \mathcal{E}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho = \\ & = \text{Tr}_{S+R}(\mathcal{E}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N-t_{N-1}} \dots (\mathcal{E}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho \otimes \rho_R \end{aligned}$$

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

В результате можно сказать, что совместное распределение вероятностей для показаний инструментов $\mathcal{E}_{x_k}^{(k)}$, если они провели измерение в момент времени t_k , имеет вид

$$\mathrm{Tr}_S \mathcal{E}_{x_N}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \dots \mathcal{E}_{x_1}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}_{x_0}^{(0)} \rho$$

Вполне положительная полугруппа

Определение. Семейство отображений $\Phi_t : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $\forall t \geq 0$ — (однопараметрическая) вполне положительная непрерывная (сохраняющая след) полугруппа:

- 1 $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}, \forall t, s \geq 0, \Phi_0 = I.$
- 2 Φ_t — непрерывна $\forall t \geq 0$ (достаточно непрерывности $t \rightarrow +0$).
- 3 Φ_t — вполне положительные, сохраняющее след $\forall t \geq 0.$

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Доказательство:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_s ds = \Phi_0 = I$$

Обозначим

$$M_t = \int_0^t \Phi_s ds$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_t &= tI + o(t), & t \rightarrow +0 \\ \det M_t &= t^n + o(t^n), & t \rightarrow +0 \end{aligned}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \forall t < \delta(\varepsilon) \quad |\det M_t - t^n| < \varepsilon t^n$$

Так как круг

$$z : |z - t^n| < \frac{1}{2}t^n$$

не содержит точки $z = 0$, то полагая $t_1 = \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2})$, получим

$$\det M_{t_1} \neq 0.$$

$\Rightarrow \exists t_1 > 0 : M_{t_1}$ — обратима

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\Phi_s &= M_{t_1}^{-1} M_{t_1} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_s ds \Phi_t = \\ &= M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_{s+t} dt = M_{t_1}^{-1} \int_s^{s+t_1} \Phi_t dt = \\ &= M_{t_1}^{-1} (M_{s+t_1} - M_s)\end{aligned}$$

В правой части стоят функции дифференцируемые по s , что гарантирует дифференцируемость Φ_s

$$\frac{d}{ds} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} (\Phi_{s+t_1} - \Phi_s) = \underbrace{M_{t_1}^{-1} (\Phi_{t_1} - I)}_{\mathcal{L}} \Phi_s \quad \square$$