ГЕНЗЕЛЕВЫ АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ, G-ИНВОЛЮЦИИ И ПРИВЕДЕННЫЕ УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ВНЕШНИХ ФОРМ ТИПА A_n

Янчевский Вячеслав Иванович

Институт математики НАН Беларуси

Пусть K — бесконечное поле. Существует большое множество важных примеров бесконечных проективно простых групп (т.е. без нецентральных нормальных подгрупп), доставляемых линейной алгеброй. Например, $SL_n(K)$, $n > 1$, и $Sp_n(K, f)$ — симплектические группы знакопеременных форм f.

Оставляя в стороне другие примеры бесконечных проективно простых групп, связанных с классическими группами, отметим, что весьма полезным расширяющим спектр таких примеров явился переход к полупростым линейным алгебраическим группам, который привел к появлению новых содержательных гипотез и результатов (в особенности в арифметической теории алгебраических групп). Этот подход позволил выделить общие свойства, отражающие феномен проективной простоты. Все необходимые определения, используемые далее (такие, например, как определение односвязности, простоты, изотропности, параболических подгрупп и пр.), могут быть без труда найдены в следующих монографиях:

Борель А. Линейные алгебраические группы //М.: Мир, 1972.

Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел //М.: Наука, 1991. — С.654.

Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы //М.: Наука, 1980. — С. 399.

Springer T.A. Linear algebraic groups/ Second edition // Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1998. — P. 334.

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем K, которое не предполагается алгебраически замкнутым, G_K — группа K-рациональных точек группы G. Рассмотрим последовательно случаи, когда G изотропна над K и G анизотропна. Напомним, что группа G анизотропна, если у нее нет собственных параболических подгрупп, определенных над K. При этом параболическая подгруппа — это подгруппа содержащая борелевскую подгруппу. Обозначим через G_K^+ нормальную подгруппу G_K, порожденную рациональными над K элементами унипотентных радикалов K-определенных параболических подгрупп. В этой ситуации Ж.Титс установил следующий важный факт (1964).

Теорема 1.

Пусть K содержит по меньшей мере 4 элемента. Тогда любая подгруппа в G_K, нормализуемая группой G_K^+, либо содержит G_K^+ либо центральна. В частности, G_K^+ проективно проста.

Таким образом, возникает новый класс проективно простых групп. Естественно считать структуру группы G_K известной, если $G_K = G_K^+$. Для специальных групп G и многих полей K этот факт был известен ко времени доказательства теоремы 1, в связи с чем следующее предположение казалось довольно естественным.

Гипотеза Кнезера–Титса

Для односвязной простой группы G, определенной и изотропной над полем K, $G_K^+ = G_K$.

Заметим, что гипотеза Кнезера–Титса очевидно справедлива в случае, когда K алгебраически замкнуто. Отметим также, что Э.Картаном была установлена справедливость гипотезы в случае, когда $K = \mathbb{R}$, а G — простая односвязная алгебраическая группа. Долгое время считалось, что гипотеза Кнезера–Титса справедлива в связи с подтверждением ее в ряде специальных случаев. Однако в 1975 г. В.П.Платонов показал в[1], что в общем случае гипотеза неверна. Последнее привело к определению Титсом групп Уайтхеда редуктивных алгебраических K-групп $W(K,G) = G_K/G_K^+$ (о дальнейшем развитии этой тематики см.[2], [3]).

[1]Платонов В.П. О проблеме Таннака-Артина// ДАН СССР. — 1975. — Т.221, no 5. — С. 1038-1041.

[2]Gille P. Le probléme de Kneser-Tits // Séminaire Boubaki / Astérisque. Vol. 326. — 2009. — Vol. 2001/2008, no 983. — x+409p.

[3]Tits J. Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps (d'après V.P.Platonov et al.)// Séminaire Bourbaki, 29e année (1976/77) / Springer, Berlin: Lecture Notes in Math. — 1978. — no 505. — 218–236p.

Пусть, по-прежнему, G — односвязная K-определенная простая алгебраическая группа. Тогда G принадлежит одному из следующих типов A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2. Среди групп этих типов наиболее интересными (и трудно поддающимися исследованию) являются группы типа A_n. В частности, группы G_K K-рациональных точек односвязных групп этого типа исчерпываются следующими

1. Внутренние формы: $SL_m(D) = \{a \in M_m(D) \colon Nrd_{M_m(D)}(a) = 1\}$, где $M_m(D)$ — алгебра $m \times m$-K-матриц с элементами в центральной K-алгебре D с делением индекса d, $Nrd_{M_m(D)} \colon M_m(D) \to K$ — отображение приведенной нормы и $n = md - 1$.
2. Внешние формы: $SU_m(D, f) = \{u \in U_m(D, f) \colon Nrd_{M_m(D)}(a) = 1\}$, где D — алгебра с делением индекса d, наделенная унитарной инволюцией τ (т.е. с нетривиальным ограничением на центре D), причем K совпадает с полем τ-инвариантных элементов центра D, f — невырожденная m-мерная эрмитова форма, $U_m(D, f)$ — унитарная группа формы f и $n = md - 1$.

Если группа G — внутренняя форма типа A_n и K-изотропна, то условие K-изотропности влечет $m \geq 2$. Рассмотрим подгруппу $SL_m^+(D)$ группы $G_K = SL_m(D)$, порожденную трансвекциями[4]. Поскольку каждая элементарная матрица унипотентна (и даже больше, лежит в унипотентном радикале подходящей параболической группы, то $SL_m^+(D)$ содержится в G_K^+). Более того, группа $SL_m^+(D)$ нормальна в $GL_m(D)$, поэтому по теореме 1 $G_K^+ = SL_m^+(D)$ и, значит, группа G_K/G_K^+ изоморфна $SL_m(D)/SL_m^+(D)$. Далее с помощью определителя Дьедонне[7],[5] заключаем, что группа $SL_m(D)/SL_m^+(D)$ изоморфна приведенной группе Уайтхеда $SK_1(D) = SL_1(D)/D^{*\prime}$ алгебры D.

[4]Артин Э.Геометрическая алгебра // М.: Наука, 1969. — С. 283

[5]Дьедонне Ж. Геометрия классических групп // М.: Мир, 1974. — С. 204

Если же G — внешняя форма типа A_n, то $G = SU_m(D,f)$ для подходящей невырожденной m-мерной эрмитовой формы над D с инволюцией τ, ограничение которой на центре D нетривиально, а K совпадает с подполем τ-инвариантных элементов центра алгебры D. Условие K-изотропности G означает изотропность формы f и в этом случае группа G_K^+ совпадает с подгруппой $TU_m(f)$, порожденной унитарными трансвекциями[6] и совпадает почти во всех случаях с коммутантом группы $U_m(D,f)$. Далее с помощью нормы Уолла (см.[9]) приходим к изоморфизму факторгруппы $SU_m(D,f)/TU_m(f)$ на приведенную унитарную группу Уайтхеда $SUK_1(D) = \Sigma'/\Sigma$, где Σ — подгруппа D^*, порожденная τ-инвариантными элементами, а Σ' состоит из элементов с τ-инвариантными приведенными нормами. Эта группа называется приведенной унитарной группой Уайтхеда алгебры D. Детали можно найти в[7].

[6] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп // М.: Мир, 1974. — С. 204

[7] Янчевский В.И. Приведенная унитарная K-теория и тела над гензелевыми дискретно-нормированными полями // Изв.АН СССР. Серия матем. — 1978. Т. 42, no 4. — С. 879–918.

Имеется большое множество публикаций, посвященных вычислению этих групп:

Платонов В.П.,Янчевский В.И. О гипотезе Кнезера-Титса для унитарных групп // Докл. АН СССР. —1975. — Т. 225, no 1. — С. 48–51.

Платонов В.П.,Янчевский В.И. SK_1 для тел некоммутативных рациональных функций // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 249, no 5. — С.1064–1068.

Янчевский В.И. Приведенная унитарная K-теория и тела над гензелевыми дискретно-нормированными полями // Изв.АН СССР. Серия матем. — 1978. — Т. 42, no 4. — С. 879–918.

Янчевский В.И. Простые алгебры с инволюциями и унитарные группы // Мат. сборник. — 1974. — Т. 93(135), no 3. — С. 368–380.

Draxl P. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields // Journal f$\ddot{u}$r Mathematik. — 1984. — Vol. 354. — P. 213–218.

Hazrat R.,Wadsworth A.R. SK_1 of graded division algebras // Israel J. Math. — 2011. — Vol. 183. — P. 117-163.

Wadsworth A.R.,Yanchevskiĭ V.I. Unitary SK_1 for a graded division ring and its quotient division ring // Journal of Algebra. — 2012. — Vol. 352. — P. 62–78.

Заметим, что анизотропные внутренние формы типа A_n связаны с группами $SK_1(D)$. Что касается анизотропных внешних форм типа A_n, то это всегда унитарные группы, связанные с анизотропными формами f. Несмотря на то, что первые работы по этой тематике относятся к началу 2000-х годов, ситуация по-прежнему остается малоприступной, и к настоящему времени известны лишь несколько следующих разрозненных первоначальных результатов о группах $SU_1(D,f)/U_1(D,f)'$ (для краткости будем ниже обозначать последнюю факторгруппу через $SUK_1^{an}(D,\tau)$ и называть приведенной анизотропной унитарной группой Уайтхеда).

1. Для кватернионных алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями, Б. Сури[8] получил явные формулы вычисления групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$.
2. В[9] Б. Сетураман и Б. Сури установили бесконечность группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ для специальных символ-алгебр D.
3. В[10] докладчиком было установлено существование эпиморфизма группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ на группу $SUK_1(D,\tau)$, что позволило в общем случае решить проблему нетривиальности группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ при условии нетривиальности групп $SUK_1(D,\tau)$. Кроме того, ввиду этой связи легко выводится бесконечность группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ при бесконечных группах $SUK_1(D,\tau)$.

---

[8] Sury B. On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D // Archiv der Mathematik. — 2008. — Vol. 90. — P. 493-500.

[9] Sethuraman B.A., Sury B. A note on the special unitary group of a division algebra // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 134. — P. 351–354.

[10] Янчевский В.И. Приведенные группы Уайтхеда и проблема сопряжённости для специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм// Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2012. — Т.400. — С. 222–245

Поскольку в настоящее время отсутствовали существенные систематические результаты по проблеме проективной простоты анизотропных внешних форм типа A_n, то естественным (и полезным) оказался подход описания групп $SUK_1^{an}(D, \tau)$ для широких классов алгебр D и инволюций τ.

Отметим, что первые основные результаты, связанные с вычислением нетривиальных приведенных групп Уайтхеда, были получены в рамках класса гензелевых алгебр с делением и использовали идею редукции проблемы вычисления этих групп к определению некоторых специальных подгрупп мультипликативных групп их алгебр вычетов.

Строение конечномерных центральных простых гензелевых алгебр впервые было получено Платоновым и Янчевским в [11], [12] и [13].

Завершенное и расширеннное доказательство этих результатов можно найти в статье [14].

[11] Платонов В.П., Янчевский В.И. Гипотеза Дьедоне о структуре унитарных групп над телом и эрмитова K-теория // Известия АН СССР. Серия матем. — 1985. — Т. 25. — С. 573–599.

[12] Платонов В.П., Янчевский В.И. К теории гензелевых тел // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, no 2. — С. 294–298.

[13] Платонов В.П., Янчевский В.И. Конечномерные гензелевы тела // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, no 3. — С. 542–547.

[14] Jacob B., Wadsworth A.R. Division algebras over henselian fields // Journal of Algebra. — 1990. — Vol. 128, no 1. — P.126–179.

Целью доклада является изложение результатов по вычислению групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ для класса гензелевых алгебр с делением с так называемыми G-инволюциями. Доклад состоит из двух частей. В первой части приводится ряд структурных результатов о строении гензелевых инволютивных алгебр с делением. Некоторые из этих результатов могут быть получены на языке градуированных алгебр [15]. Мы, однако, предпочитаем оставаться в рамках гензелевой ситуации и, как нам кажется, уместно использование тут гензелевого языка. Во второй части полученные результаты используются при описании приведенных анизотропных унитарных групп Уайтхеда $SUK_1^{an}(D,\tau)$ для гензелевых алгебр D.

[15] Hazrat R., Wadsworth A.R. SK_1 of graded division algebras // Israel J. Math. — 2011. — Vol. 183. — P. 117-163.

Вначале напомним определение G-инволюции.

Определение.

Пусть $D \in \mathcal{D}(K)$ — скрещенное произведение, $D = (L/K, G_K, f)$, где $G_K = Gal(L/K)$, $L = N \otimes_k K$, N/k — расширение Галуа, линейно разделенное с K над k, с инволюцией $\tau \in Inv_{K/k}(D)$. Инволюция τ называется G_K-инволюцией, если ограничение $\tau|_N$ тождественно. Ниже такие инволюции будут обозначаться через τ_L.

Если группа G_K циклична, нильпотентна, разрешима, то τ_L называется соответственно циклической, нильпотентной, разрешимой инволюцией.

Определение.

G_K-инволюция τ_L называется инволюцией вида $\tau_L(u_1, ..., u_n)$, если существует такой стандартный базис $\{u_{s_i}\}_{s_i \in Gal(L/K)}$, что $u_{s_i} \in U(D, \tau)$ (такой базис обычно называется стандартным унитарным или просто унитарным).

Если $G_K = \langle \sigma \rangle$ — циклическая группа, то предыдущие определения превращаются в следующее

Определение.

Унитарная K/k-инволюция τ алгебры $D \in \mathcal{D}(K)$ называется циклической (и обозначается τ_L), если $D = (L, \sigma, u)$, $L^\tau = L$ и расширение $L_\tau = \{l \in L | l^\tau = l\}$ циклично над k.
Циклическая инволюция τ_L называется инволюцией, сопровождаемой (или сопровожденной) унитарным элементом, если существует такой элемент $u \in U(D, \tau_L)$, что автоморфизм σ совпадает с ограничением внутреннего автоморфизма i_u на поле L. Ниже такая инволюция будет обозначаться через $\tau_L(u)$ и называться инволюцией вида $\tau_L(u)$.

Рассмотрение случая циклических инволюций посвящена недавняя статья докладчика [16]. Целью доклада является рассмотрение случая алгебр D с разрешимыми инволюциями, что в значительной мере расширяет результаты из последней статьи, где исследуемые алгебры были циклическими.

[16] Янчевский В.И. Гензелевы алгебры с делением и приведенные унитарные группы Уайтхеда для внешних форм анизотропных алгебраических групп типа A_n// Мат.сборник. — 2022. — Т.213, №8. — С. 83–148.

Для формулировки результатов нам потребуются следующие определения.

Далее $Z(R)$ — центр кольца R, $C_R(S)$ — централизатор подкольца S в R. Если $S \subseteq Z(R)$, то R называется S-алгеброй. Предполагается, что все кольца обладают единичными элементами и что $1_S = 1_R$, если S — подкольцо в R. Кроме того, при гомоморфизмах единичные элементы отображаются друг в друга. Ядра гомоморфизмов f обозначаются через $Ker(f)$. Через R^* обозначается мультипликативная подгруппа кольца R. Если $a \in R^*$, то через i_a будет обозначаться внутренний автоморфизм кольца R, задаваемый формулой: для произвольного $r \in R$ $r^{i_a} = a^{-1}ra$. Иногда для удобства ссылок под i_a будет пониматься автоморфизм, определяемый по формуле: для произвольного $r \in R$ $r^{i_a} = ara^{-1}$ (впрочем, из контекста всегда будет понятно какая используется интерпретация). Для подалгебры E алгебры с делением D через $[D : E]$ обозначается размерность D как левого векторного пространства над E. Повсюду ниже будет предполагаться, что все рассматриваемые алгебры конечномерны.

Кроме того для поля K и конечномерной центральной простой K-алгебры A через $[A]$ обозначается ее класс A в группе Брауэра $Br(K)$. По теореме Ведербарна $A \cong M_n(D)$ для K-центральной алгебры D с делением, где $M_n(D)$ — алгебра $n \times n$-матриц над D. Алгебра с делением D определяется с точностью до K-изоморфизма и будет называться основой алгебры A. Мы будем писать для K-алгебр A и B $A \sim B$, если основы этих алгебр K-изоморфны. По определению индекс $indA$ алгебры A совпадает с $\sqrt{[D:K]}$, степень $degA = n \cdot indA$, а экспонента $\exp A$ алгебры A есть порядок $[A]$ в $Br(K)$. Кроме того, положим

$$\mathcal{D}(K) = \{D \colon D \text{ — центральная } K\text{-алгебра с делением}\} \text{ и } [D:K] < \infty.$$

Пусть алгебра D обладает унитарной инволюцией τ (т.е. $\tau|_K \neq id$) и $k = \{a \in K | a^\tau = a\}$. В этом случае пишут $\tau \in Inv_{K/k}(D)$. Пусть $Nrd_D\colon D \to K$ обозначает отображение приведенной нормы алгебры D.
Унитарной группой $U(D,\tau)$ алгебры D (относительно τ) называется группа $U(D,\tau) = \{d \in D^* | d^\tau d = 1\}$,
а специальной унитарной группой $SU(D,\tau)$ ее подгруппа $U(D,\tau) \cap SL(D)$, где $SL(D) := SL_1(D)$.
Кроме того, для конечного расширения полей L/K через $SL(L/K)$ будет обозначаться группа $\{l \in L^* | N_{L/K}(l) = 1\}$.
Если еще расширение L/K обладает автоморфизмом второго порядка τ таким, что $K^\tau = K$, то через $U(L,\tau)$ обозначается подгруппа $\{l \in L^* | l^\tau l = 1\}$, а через $SU(L,\tau)$ — подгруппа $U(L,\tau) \cap SL(L/K)$.

Нам также потребуются некоторые сведения об алгебрах с делением, обладающих нормированиями. Пусть $D \in \mathcal{D}(K)$. Нормированием v на D называется функция $v : D^* \to \Gamma$ (здесь Γ — вполне упорядоченная абелева группа, записываемая аддитивно) со следующими свойствами: для всех $a, b \in D^*$
(i) $v(ab) = v(a) + v(b)$;
(ii) $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$, если $b \neq -a$.

Для нормирования v на D определены:

кольцо нормирования $V_D = \{d \in D^* | v(d) \geq 0\} \cup \{0\}$;
идеал нормирования $M_D = \{d \in D^* | v(d) > 0\} \cup \{0\}$ (единственный двусторонний максимальный идеал кольца V_D);
группа v-единиц $U_D = V_D \setminus M_D = V_D^*$ и ее подгруппа $1 + M_D = \{1 + m \mid m \in M_D\}$;
V_K/M_K — алгебра $\overline{D} = V_D/M_D$ нормирования v и группа значений $\Gamma_D = v(D^*)$.

Более общо, для произвольного подмножества $S \subset V_D$ через $\overline{S}$ будем обозначать совокупность образов элементов из S при каноническом гомоморфизме (гомоморфизме редукции, гомоморфизме перехода к вычетам) из V_D в $\overline{D}$.

Так как $V_D^\tau = V_D$ и $M_D^\tau = M_D$, то вместе с инволюцией τ определена ее редукция $\overline{\tau}\colon \overline{D} \to \overline{D}$, при этом $(d + M_D)^{\overline{\tau}} = d^\tau + M_D$ для произвольного $d \in V_D$.
Если E — K-подалгебра K-алгебры D с нормированием (D, v), то ограничение $v|_E$ нормирования v на E^* — нормирование на E. В этом случае индекс ветвления алгебры D над E определяется как индекс $|\Gamma_D : \Gamma_E|$ подгруппы Γ_E в Γ_D.
Для произвольного $d \in D^*$ внутренний автоморфизм i_d переводит V_D в V_D и M_D в M_D; и потому i_d индуцирует $\overline{K}$-автоморфизм $\overline{D}$, который при ограничении на $Z(\overline{D})$ дает $\overline{K}$-автоморфизм, обозначаемый ниже символом $\overline{i_d}$.
Окончательно, отображение $d \mapsto \overline{i_d}$ задает гомоморфизм $\alpha : D^* \to Gal(Z(\overline{D})/\overline{K})$. Для произвольного $u \in U_D$ автоморфизм $\overline{i_u}$ есть сопряжение с помощью $\overline{u}$, поэтому $u \in ker(\alpha)$. Кроме того, $K^* \subseteq ker(\alpha)$. Поскольку $D^*/U_D K^* \cong \Gamma_D/\Gamma_K$, отображение α индуцирует корректно определенный гомоморфизм $\theta_D\colon \Gamma_D/\Gamma_K \to Gal(Z(\overline{D})/\overline{K})$, задаваемый следующим образом: $\overline{v}(d) \mapsto \overline{i_d}$, где $\overline{v}(d) = v(d) + \Gamma_K$.

Хорошо известно следующее неравенство:

$$[D:E] \geq [\overline{D}:\overline{E}]\cdot[\Gamma_D:\Gamma_E]. \tag{1}$$

По теореме Островского-Дракcла имеет место соотношение $[D:K] = q^r[\overline{D}:\overline{K}]\cdot|\Gamma_D:\Gamma_K|$, где $q = char(\overline{D})$, если $char(\overline{D}) \neq 0$, и $q = 1$ при $char(\overline{D}) = 0$, а r — неотрицательное целое число. Алгебра D называется бездефектной над K (относительно v), если $[D:K] < \infty$ и $[D:K] = [\overline{D}:\overline{K}]\cdot|\Gamma_D:\Gamma_K|$. Алгебра D называется неразветвленной над K, если $[D:K] = [\overline{D}:\overline{K}] < \infty$ и $Z(\overline{D})$ сепарабельно над $\overline{K}$. Выражение "бездефектная (соответственно неразветвленная) алгебра D" будет означать "бездефектная (соответственно неразветвленная) алгебра над $Z(D)$". Ясно, что в случае, когда $char(\overline{D}) = 0$ либо $char(\overline{D}) \nmid [D:K]$, алгебра D бездефектна. Алгебра $D \in \mathcal{D}(K)$ называется вполне разветвленной, если $[D:K] = [\Gamma_D:\Gamma_K]$. Наконец, алгебра D/K называется непосредственной, если $[\overline{D}:\overline{K}]\cdot|\Gamma_D:\Gamma_K| = 1$.

Известно, что гомоморфизм редукции (перехода к вычетам) определяет эпиморфизм θ_D группы Γ_D/Γ_K в группу $\overline{K}$-автоморфизмов центра $Z(\overline{D})$ алгебры вычетов $\overline{D}$ [17].

С гомоморфизмом редукции и гомоморфизмом θ_D связан так называемый дефект редукции λ_D ($\lambda_D = indD/ind\overline{D}[Z(\overline{D}) : K]$). Ниже, допуская некоторую вольность, будем опускать индекс D и писать вместо λ_D просто λ. Напомним, что редукция называется ручной, если расширение $Z(\overline{D})/\overline{K}$ сепарабельно и $char(\overline{K})$ не делит порядок $Ker(\theta_D)$.

[17] Jacob B., Wadsworth A.R. Division algebras over henselian fields // Journal of Algebra. — 1990. — Vol. 128, no 1. — P. 126–179.

Основной интерес для нас будут представлять слабо разветвленные алгебры.

Определение.

Пусть K — гензелево поле и $D \in \mathcal{D}(K)$. Алгебра D называется слабо разветвленной, если (i) $char(\overline{K}) = 0$ или (ii) $char(\overline{K}) \neq 0$, D бездефектна с ручной редукцией.

Повсюду ниже множество слабо разветвленных над K алгебр с делением обозначается через $TR(K)$.

Для $D \in TR(K)$ индекс ветвления D над K, определяемый как индекс группы Γ_K в Γ_D, есть произведение верхнего индекса ветвления, совпадающего с λ_D^2, и нижнего, совпадающего с $[Z(\overline{D}) : \overline{K}]$.

К случаю алгебры D с унитарной инволюцией τ для гензелевого поля k применимы все предыдущие обозначения, поскольку если поле k обладает гензелевым нормированием v_k, то оно однозначно продолжается до нормирования v_K поля K и $v_D = v$ алгебры D.

Вторая часть доклада посвящена получению формул для вычисления групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$, в терминах подгрупп мультипликативной группы алгебры вычетов $\overline{D}^*$. Основное утверждение, связанное с вычислением групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$, формулируется в терминах следующих групп:

$SL^v(D) = \{d \in SL(D) | N_{Z(\overline{D})/\overline{K}}(Nrd_{\overline{D}}(\overline{d})) = 1\}$,
$SU^v(D,\tau) = \{d \in SU(D,\tau) | N_{Z(\overline{D})/\overline{K}}(Nrd_{\overline{D}}(\overline{d})) = 1\}$,
$SUK_1^v(D,\tau) = \overline{SU^v(D,\tau)}/U(\overline{D},\overline{\tau})'$,
$E_\lambda = C_\lambda(\overline{K}) \cap N_{Z(\overline{D})/\overline{K}} \circ Nrd(\overline{D})^{\overline{\tau}-1}$,

где $C_\lambda(\overline{K})$ — группа корней степени λ из 1, принадлежащих полю $\overline{K}$.

Следующее утверждение является основным при вычислении групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$.

Теорема.

Пусть алгебра $D \in TR(K)$, $char\overline{k} \neq 2$ и $\tau \in Inv_{K/k}(D)$, причем k гензелево. Тогда во введенных выше обозначениях имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными столбцом и строками

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & E \arrow[r] & SU^v(D,\tau)/(U(D,\tau))' \arrow[r] & SUK_1^v(D,\tau) \arrow[r] \arrow[d] & 1, \\
1 \arrow[r] & E \arrow[r] & SUK_1^{an}(D,\tau) \arrow[r] & \overline{SU(D,\tau)}/U(\overline{D},\overline{\tau})' \arrow[r] \arrow[d] & 1. \\
 & & & E_\lambda \arrow[d] & \\
 & & & 1 &
\end{tikzcd}$$

где $E = ((1+M_D) \cap SU(D,\tau))U(D,\tau)'/U(D,\tau)'$.

Теорема (продолжение).

Помимо этого, точны также последовательности:

$$1 \to SUK_1^{an}(\overline{D}, \overline{\tau}) \to SUK_1^{v}(D, \tau) \to Nrd_{\overline{D}}(\overline{U(D, \tau)}) \cap Nrd_{\overline{D}}(\overline{SL^v(D, \tau)}) \to 1,$$

$$1 \to SUK_1^{an}(\overline{D}, \overline{\tau}) \to \overline{SU(D, \tau)}/U(\overline{D}, \overline{\tau})' \to \overline{SU(D, \tau)}/SU(\overline{D}, \overline{\tau}) \to 1.$$

Замечание.

Возникающие в теореме точные последовательности связывают подгруппы групп D^* и $\overline{D}^*$, а гомоморфизмы, входящие в точные последовательности, индуцируются гомоморфизмом редукции и легко восстанавливаются из контекста, поэтому для краткости мы оставляем описание этих гомоморфизмов слушателям.

При доказательстве основного результата использовался следующий инволютивный аналог одной теоремы П. Драксла [18].

Теорема.

Пусть K/k — слабо разветвленное расширение, алгебра $D \in TR(K)$ и вполне разветвлена $(D \neq K)$, $\tau \in Inv_{K/k}(D)$. Тогда для некоторого натурального r алгебра $D = D_1 \otimes_K \cdots \otimes_K D_r$, где D_i — подходящее тензорное произведение τ-инвариантных символ-алгебр $A(a_{ij}, b_{ij}, K, \varepsilon_{p_i^{\alpha_j}})$, экспоненты которых равны их индексам $(1 \leq i \leq r,\ j \in \mathbb{Z})$, а соответствующие канонические образующие τ-инвариантны, p_i — простые делители индекса $indD$. В частности, алгебра D есть произведение своих τ-инвариантных примарных компонент.

[18] Draxl P. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields. // Journal für Mathematik. — 1984. — Vol. 354. — P. 213–218.

Таким образом, задача вычисления вышеупомянутых групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$ редуцируется к вычислению подгрупп группы $\overline{D}^*$ и группы E. Таким образом, с точки зрения предыдущей теоремы особенно важным является вычисление группы

$$E = ((1+M_D)\cap SU(D,\tau))U(D,\tau)'/U(D,\tau)',$$

которая, очевидно, изоморфна группе $((1+M_D)\cap SU(D,\tau))/(U(D,\tau)'\cap(1+M_D))$. Ясно, что эта группа тривиальна, если $((1+M_D)\cap SU(D,\tau))\subset U(D,\tau)'$. Если последнее условие выполнено, то будем говорить, что для группы $SU(D,\tau)$ справедлива конгруэнц-теорема или что группа $SU(D,\tau)$ обладает конгруэнц-свойством.

В этих обозначениях имеет место важная теорема.

Теорема.

Пусть $D \in TR(K)$, $\tau \in Inv_{K/k}(D)$. Тогда группа $SU(D, \tau)$ обладает конгруэнц-свойством в следующих двух случаях:
(i) $\overline{D}$ — поле,
(ii) $\overline{D}$ — не поле, $(indD, char\overline{k}) = 1$ (если $char\overline{k} > 0$) и $\overline{\tau}$ сопровождена унитарными элементами u_1, ..., u_r.

Оказывается, что класс инволюцией вида $\tau_L(u_1, ..., u_r)$ достаточно широк. Так, например, в классе циклических K/k-инволюций τ_L алгебры D с фиксированным полем L всегда существует инволюция вида $\tau_L(u)$.

Не всякая K/k-инволюция алгебры D имеет вид $\tau_L(u)$ (и даже циклична [19]). Однако, всегда существует регулярное центральное расширение N центра K такое, что инволюция τ продолжается до унитарной инволюции $\tau_E(v)$ для подходящих поля $E \subset D \otimes_K N$ и элемента $v \in U(D \otimes_K N, \tau_E(v))$.

[19] Прокопчук А.В., Янчевский В.И. О нециклических унитарных инволюциях гензелевых дискретно нормированных алгебр с делением // Известия НАН Беларуси. Сер.физико-математических наук. — 2014. — Т. 1. — С. 51–53.

В заключение рассмотрим несколько примеров, относящихся (для простоты) к случаю циклических инволюций. Ниже сохраняются предположения: $D \in TR(K)$, $char\overline{k} \neq 2$ и k гензелево.

Теорема.

Пусть алгебра D неразветвлена. Тогда группы $SUK_1^{an}(D,\tau)$ и $SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau})$ изоморфны, если инволюция $\overline{\tau}$ имеет вид $\overline{\tau}_{\overline{L}}(u)$, $u \in U(\overline{D},\overline{\tau})$.
Последнее условие выполнено для кватернионных алгебр D.

Для алгебры D с нетривиальным ветвлением будем иметь

Теорема.

Пусть $\overline{D}$ — поле. Тогда $E = 1$ и имеет место точная последовательность

$$1 \to \{\overline{z} \in \overline{Z} | N_{\overline{Z}/\overline{K}}(\overline{z}) \in \overline{k}\}/\overline{Z}^*_{\overline{\tau}} \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1.$$

В частности, если $E_\lambda = 1$, то $SUK_1^{an}(D,\tau) \cong \Sigma'_{Nrd_{\overline{D}}}/\Sigma_{Nrd_{\overline{D}}}$, где $\Sigma_{Nrd_{\overline{D}}} = Nrd_{\overline{D}}(\overline{D}^*)_{\overline{\tau}}$,
$\Sigma'_{Nrd_{\overline{D}}} = \{z \in Nrd_{\overline{D}}(\overline{D}^*) | N_{Z(\overline{D})/\overline{K}} \in \overline{k}\}$.

Теорема.

Пусть $\lambda = 1$. Тогда точна следующая последовательность

$$1 \to SUK_1^{an}(\overline{D},\overline{\tau}) \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to \Sigma'_{Nrd_{\overline{D}}}/\Sigma_{Nrd_{\overline{D}}} \to 1.$$

Рассмотрим теперь случаи специальных полей $\overline{k}$.

Предложение.

Пусть $\overline{k}$ — поле и $dim\,\overline{k} \leq 1$ (глава 2, §3)[20]. Тогда имеют место следующая точная последовательность:

$$1 \to SL(\overline{Z}/\overline{K}))/(SL(\overline{Z}/\overline{K})) \cap \overline{Z}^*_{\overline{\tau}}) \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1.$$

[20] Серр Ж.-П. Когомологии Галуа// М:Мир, 1968. — 208с.

Обратимся к случаю конечного $\overline{k}$.

Предложение.

Пусть $\overline{k}$ — конечное поле, $char\overline{k} \neq 2$, центральная алгебра $D \in TR(K)$ с унитарной инволюцией τ. Тогда группа $SUK_1^{an}(D,\tau)$ может быть вычислена следующим образом: если K/k вполне разветвлено, то

$$SUK_1^{an}(D,\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{Z} = \overline{K}, \\ \overline{Z}^*/\overline{Z}^*_{\overline{\tau}}, & \text{если } [\overline{Z} : \overline{K}] = 2, \end{cases}$$

а если K/k неразветвлено, то $SUK_1^{an}(D,\tau) \cong C_\lambda(\overline{K}) \cap \overline{K}^{\overline{\tau}-1}$.

В заключение рассмотрим еще один пример.

Предложение.

Пусть $\overline{k}$ — расширение степени трансцендентности 1 алгебраически замкнутого поля. Тогда $SUK_1^v(D,\tau) \cong \Sigma'_{Nrd_{\overline{D}}}/\Sigma_{Nrd_{\overline{D}}}$ и имеет место следующая точная последовательность:

$$1 \to SUK_1^v(D,\tau) \to SUK_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1,$$

где

$$E_\lambda = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l}\text{если } K/k \text{ вполне разветвлено, либо} \\ K/k \text{ неразветвлено, индекс } \lambda \text{ нечетен или} \\ \text{не существует элемента } s \in SU(D,\tau) \text{ такого, что } N_{\overline{Z}/\overline{K}}(\overline{s}) = \overline{-1};\end{array} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$