Алгебраическая независимость и экспоненциальная функция

Ю.В. Нестеренко
механико-математический факультет МГУ

“Числа и функции”

Мемориальная конференция к 80-летию Алексея Николаевича Паршина

,

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
28.11.2022-2.12.2022г.

Теорема Шнейдера-Ленга

Теорема (С. Ленг, 1965)

Пусть $\mathbb{K}$ *конечное расширение поля рациональных чисел,*
• $f_1(z), \cdots, f_N(z)$ *мероморфные функции порядка не более* ρ.
• $\deg tr_{\mathbb{Q}}\mathbb{K}(f_1(z), \cdots, f_N(z)) \geq 2$,
• *производная* $\frac{d}{dz}$ *отображает кольцо* $\mathbb{K}[f_1(z), \cdots, f_N(z)]$ *в себя.*
Тогда количество различных комплексных чисел w *с условием*

$$f_i(w) \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq N \quad \textit{не превосходит} \quad 10\ \rho\ [\mathbb{K} : Q].$$

Примеры

- 1. **Функции** z, e^z

  Эрмит, 1873: e трансцендентно. $(w = n > 0,\ \ n \in \mathbb{Z})$

Примеры

- 1. **Функции** z, e^z

  Эрмит, 1873: e трансцендентно. $(w = n > 0,\ \ n \in \mathbb{Z})$

  Линдеман,1882: Если α - ненулевое алгебраическое число, то e^{α} трансцендентно. $(w = n\alpha,\ \ n \in \mathbb{N})$ При $\alpha = \pi i$ получается трансцендентность π.

Примеры

- 1. **Функции** z, e^z

  Эрмит, 1873: e трансцендентно. $(w = n > 0,\ n \in \mathbb{Z})$

  Линдеман,1882: Если α - ненулевое алгебраическое число, то e^α трансцендентно. $(w = n\alpha,\ n \in \mathbb{N})$ При $\alpha = \pi i$ получается трансцендентность π.
- 2. **Функции** e^z, e^{bz}**, где** $b \notin \mathbb{Q}$

Гельфонд, 1934; Шнейдер, 1934.

Седьмая проблема Гильберта: при алгебраических $a, b, a \neq 0,\ 1$ и $b \notin \mathbb{Q}$ число a^b трансцендентно. $(w = n \ln a,\ n \in \mathbb{N})$

Примеры

- 1. **Функции** z, e^z

  Эрмит, 1873: e трансцендентно. $(w = n > 0,\ n \in \mathbb{Z})$

  Линдеман,1882: Если α - ненулевое алгебраическое число, то e^α трансцендентно. $(w = n\alpha,\ n \in \mathbb{N})$ При $\alpha = \pi i$ получается трансцендентность π.
- 2. **Функции** e^z, e^{bz}**, где** $b \notin \mathbb{Q}$

Гельфонд, 1934; Шнейдер, 1934.

Седьмая проблема Гильберта: при алгебраических $a, b, a \neq 0,\ 1$ и $b \notin \mathbb{Q}$ число a^b трансцендентно. $(w = n \ln a,\ n \in \mathbb{N})$
- 3. Эллиптические функции.

Примеры

- 1. **Функции** z, e^z

 Эрмит, 1873: e трансцендентно. $(w = n > 0,\ n \in \mathbb{Z})$

 Линдеман,1882: Если α - ненулевое алгебраическое число, то e^{α} трансцендентно. $(w = n\alpha,\ n \in \mathbb{N})$ При $\alpha = \pi i$ получается трансцендентность π.
- 2. **Функции** e^z, e^{bz}**, где** $b \notin \mathbb{Q}$

Гельфонд, 1934; Шнейдер, 1934.

Седьмая проблема Гильберта: при алгебраических $a, b, a \neq 0,\ 1$ и $b \notin \mathbb{Q}$ число a^b трансцендентно. $(w = n \ln a,\ n \in \mathbb{N})$
- 3. Эллиптические функции.

Линдеман - Вейерштрасс, 1885: *Если* $a_1, \ldots, a_p$ *— алгебраические числа, линейно независимые над* $\mathbb{Q}$*, то числа*

$$e^{a_1}, \ \ldots, \ e^{a_p}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$*.*

Исключение переменных

Лемма 1 (Зигель 1929)

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m, \overline{\omega} \neq \overline{0}$. *Предположим, что для любого достаточно большого* n, *существуют такие линейные формы*

$$L_i(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

что

1. $L_1(\overline{x}), \dots, L_m(\overline{x})$ *линейно независимы,*

Исключение переменных

Лемма 1 (Зигель 1929)

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m, \overline{\omega} \neq \overline{0}$. *Предположим, что для любого достаточно большого* n, *существуют такие линейные формы*

$$L_i(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

что

1. $L_1(\overline{x}), \ldots, L_m(\overline{x})$ *линейно независимы,*
2. $|a_{ij}| \leq A_n \qquad c\ A_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$,

Исключение переменных

Лемма 1 (Зигель 1929)

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m, \overline{\omega} \neq \overline{0}$. *Предположим, что для любого достаточно большого* n, *существуют такие линейные формы*

$$L_i(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

что

1. $L_1(\overline{x}), \ldots, L_m(\overline{x})$ *линейно независимы,*
2. $|a_{ij}| \leq A_n \qquad c\ A_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$,
3. $\max_i \mid L_i(\overline{\omega}) \mid = o(A_n^{1-\lambda})$ *при* $n \to \infty$.

для некоторого фиксированного числа $\lambda \geq 1$.

Исключение переменных

Лемма 1 (Зигель 1929)

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m, \overline{\omega} \neq \overline{0}$. *Предположим, что для любого достаточно большого* n, *существуют такие линейные формы*

$$L_i(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

что

1. $L_1(\overline{x}), \ldots, L_m(\overline{x})$ *линейно независимы,*
2. $|a_{ij}| \leq A_n \qquad$ *с* $A_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$,
3. $\max_i \mid L_i(\overline{\omega}) \mid = o(A_n^{1-\lambda})$ *при* $n \to \infty$.

для некоторого фиксированного числа $\lambda \geq 1$.
Тогда среди чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$ *имеется не менее* λ *линейно независимых над* $\mathbb{Q}$.

Гипотеза Гельфонда, 1948: *Если* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, 1, \deg \beta = d \geq 2$, *то* $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \cdots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ *алгебраически независимы*.

Гипотеза Гельфонда, 1948: *Если* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, 1, \deg\beta = d \geq 2$, *то* $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \cdots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ *алгебраически независимы*.

Теорема (Гельфонд, 1948) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ с $\alpha \neq 0$, 1 и $\deg \beta = 3$. Тогда $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}$ алгебраически независимы.

Гипотеза Гельфонда, 1948: *Если* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, 1, \deg \beta = d \geq 2$, *то* $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \cdots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ *алгебраически независимы*.

Теорема (Гельфонд, 1948) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ с $\alpha \neq 0$, 1 и $\deg \beta = 3$. Тогда $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}$ алгебраически независимы.

Теорема (Гельфонд, 1950, Тайдеман, 1970) Пусть $\{a_1, \cdots, a_p\}$ и $\{b_1, \cdots, b_q\}$ — два набора линейно независимых над $\mathbb{Q}$ комплексных чисел и $\frac{pq+p}{p+q} \geq 2$. Тогда

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}) \geq 2.$$

Гипотеза Гельфонда, 1948: *Если* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, 1, \deg\,\beta = d \geq 2$, *то* $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \cdots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ *алгебраически независимы*.

Теорема (Гельфонд, 1948) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ с $\alpha \neq 0$, 1 и $\deg$ $\beta = 3$. Тогда $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}$ алгебраически независимы.

Теорема (Гельфонд, 1950, Тайдеман, 1970) Пусть $\{a_1, \cdots, a_p\}$ и $\{b_1, \cdots, b_q\}$ — два набора линейно независимых над $\mathbb{Q}$ комплексных чисел и $\frac{pq+p}{p+q} \geq 2$. Тогда

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}) \geq 2.$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, $1, p = q = \deg\beta = 3, a_j = \beta^{j-1}, b_j = \beta^{j-1}\log\alpha$.

Гипотеза Гельфонда, 1948: *Если* $\alpha, \beta \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, 1, \deg \beta = d \geq 2$, *то* $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \cdots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ *алгебраически независимы*.

Теорема (Гельфонд, 1948) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ с $\alpha \neq 0$, 1 и $\deg$ $\beta = 3$. Тогда $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}$ алгебраически независимы.

Теорема (Гельфонд, 1950, Тайдеман, 1970) Пусть $\{a_1, \cdots, a_p\}$ и $\{b_1, \cdots, b_q\}$ — два набора линейно независимых над $\mathbb{Q}$ комплексных чисел и $\frac{pq+p}{p+q} \geq 2$. Тогда

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}) \geq 2.$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, $1, p = q = \deg \beta = 3, a_j = \beta^{j-1}, b_j = \beta^{j-1} \log \alpha$.

Теорема (Гельфонд+Фельдман 1950, Броунвелл 1979, Диас 1990) Для любого ненулевого многочлена $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ имеем

$$\ln \mid P(\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}) \mid > -\exp(c \deg P(\deg P + \ln H(P))).$$

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m$. Предположим, что для всех достаточно больших N, существуют многочлены $A_N(\overline{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]$ такие, что

$$\deg A_N \le \sigma(N), \quad \log H(A_N) \le \sigma(N)$$

$$0 <\mid A_N(\overline{\omega}) \mid < \ e^{-\lambda(N)}$$

где $\sigma(N)$ и $\lambda(N)$ - положительные, возрастающие до бесконечности функции.

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m$. Предположим, что для всех достаточно больших N, существуют многочлены $A_N(\overline{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]$ такие, что

$$\deg A_N \leq \sigma(N), \quad \log H(A_N) \leq \sigma(N)$$

$$0 <| A_N(\overline{\omega}) | < e^{-\lambda(N)}$$

где $\sigma(N)$ и $\lambda(N)$ - положительные, возрастающие до бесконечности функции.

Предложение

1. Если $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\lambda(N)}{\sigma(N)} = \infty$, *то, по крайней мере одно из чисел* $\omega_1, \cdots, \omega_m$ *трансцендентно.*

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m$. Предположим, что для всех достаточно больших N, существуют многочлены $A_N(\overline{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]$ такие, что

$$\deg A_N \leq \sigma(N), \quad \log H(A_N) \leq \sigma(N)$$

$$0 < \mid A_N(\overline{\omega}) \mid < \; e^{-\lambda(N)}$$

где $\sigma(N)$ и $\lambda(N)$ - положительные, возрастающие до бесконечности функции.

Предложение

1. Если $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\lambda(N)}{\sigma(N)} = \infty$, то, по крайней мере одно из чисел $\omega_1, \cdots, \omega_m$ трансцендентно.
2. (Гельфонд 1948) Если $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\lambda(N)}{\sigma(N+1)^2} = \infty$, то по крайней мере два из чисел $\omega_1, \cdots, \omega_m$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Критерий Филиппона, 1986

Предложение

Пусть $\varkappa \in \mathbb{R}, \quad \omega_1, \cdots, \omega_m \in \mathbb{C}$. *Допустим также, что для всех достаточно больших* N *существуют многочлены* $A_N \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]$ *такие, что*

$$\deg A_N + \log H(A_N) \le \sigma(N)$$

$$e^{-c\cdot\lambda(N-1)} \le \mid A_N(\omega_1, \cdots, \omega_m) \mid \le e^{-\lambda(N)},$$

где $c = c(\omega_i, k, m) > 1$ *и* $\sigma(N), \ \lambda(N), \ \frac{\lambda(N-1)}{(\sigma(N))^{\varkappa}}$ *— возрастающие до бесконечности функции. Тогда*

$$\operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(\omega_1, \cdots, \omega_m) > \varkappa - 1.$$

Функции $z, e^{b_1 z}, \ldots, e^{b_q z}$

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}\left(a_1, \cdots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}\right),$$

где предполагаются **технические условия:**
Существует постоянная $\gamma > 0$ *такая, что при всех* $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$
с $\max_i \mid x_i \mid > 0, \ \max_i \mid y_i \mid > 0$ выполняются неравенства

$$\mid x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p \mid \geq \exp\{-\gamma X \log X\}, \ X = \max_{1 \leq i \leq p} \mid x_i \mid,$$
$$\mid y_1 b_1 + \cdots + y_q b_q \mid \geq \exp\{-\gamma Y \log Y\}, \ Y = \max_{1 \leq i \leq q} \mid y_i \mid.$$

Функции $z, e^{b_1 z}, \dots, e^{b_q z}$

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}\left(a_1, \cdots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}\right),$$

где предполагаются **технические условия:**
Существует постоянная $\gamma > 0$ *такая, что при всех* $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ с $\max_i \mid x_i \mid > 0, \ \max_i \mid y_i \mid > 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \mid x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p \mid &\geq \exp\{-\gamma X \log X\}, \ X = \max_{1 \leq i \leq p} \mid x_i \mid, \\ \mid y_1 b_1 + \cdots + y_q b_q \mid &\geq \exp\{-\gamma Y \log Y\}, \ Y = \max_{1 \leq i \leq q} \mid y_i \mid. \end{aligned}$$

Теорема 1. *При выполнении технических условий степень трансцендентности поля* $\mathbb{L}$ не меньше, чем $\left[\frac{pq+p}{p+q}\right]$.

Функции $z, e^{b_1 z}, \ldots, e^{b_q z}$

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}\left(a_1, \cdots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}\right),$$

где предполагаются **технические условия:**
Существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ с $\max_i \mid x_i \mid > 0,\ \max_i \mid y_i \mid > 0$ выполняются неравенства

$$\mid x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p \mid \geq \exp\{-\gamma X \log X\},\ X = \max_{1 \leq i \leq p} \mid x_i \mid,$$
$$\mid y_1 b_1 + \cdots + y_q b_q \mid \geq \exp\{-\gamma Y \log Y\},\ Y = \max_{1 \leq i \leq q} \mid y_i \mid.$$

Теорема 1. *При выполнении технических условий степень трансцендентности поля $\mathbb{L}$* не меньше, чем $\left[\frac{pq+p}{p+q}\right]$.

Теорема 2. *Если α, β — алгебраические числа, $\alpha \ln \alpha \neq 0$, и $d = \deg \beta \geq 2$, то* $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq \left[\frac{d+1}{2}\right]$.

Функции $z, e^{b_1 z}, \ldots, e^{b_q z}$

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}\left(a_1, \cdots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}\right),$$

где предполагаются **технические условия:**
Существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$
с $\max_i | x_i | > 0, \ \max_i | y_i | > 0$ выполняются неравенства

$$| x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p | \geq \exp\{-\gamma X \log X\}, \ X = \max_{1 \leq i \leq p} | x_i |,$$
$$| y_1 b_1 + \cdots + y_q b_q | \geq \exp\{-\gamma Y \log Y\}, \ Y = \max_{1 \leq i \leq q} | y_i | .$$

Теорема 1. *При выполнении технических условий степень трансцендентности поля $\mathbb{L}$* не меньше, чем $\left[\frac{pq+p}{p+q}\right]$.

Теорема 2. *Если α, β — алгебраические числа, $\alpha \ln \alpha \neq 0$, и $d = \deg \beta \geq 2$, то $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq \left[\frac{d+1}{2}\right]$.*

Т.1 $\Rightarrow$ Т.2 : $p = q = d, a_j = \beta^{j-1}, b_j = \beta^{j-1} \log \alpha.$

Формы Чжоу

$\mathbb{K}$ – поле характеристики 0.
$\mathbb{K}[X]$ – кольцо многочленов от переменных $x_0, \ldots, x_m$ над $\mathbb{K}$;
r – целое число, $1 \le r \le m$, а u_{ij}, $1 \le i \le r$, $0 \le j \le m$, – переменные, алгебраически независимые над $K[X]$. Введем линейные формы

$$L_i(X) = \sum_{j=0}^{n} u_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Пусть I – некоторый однородный идеал кольца $\mathbb{K}[X]$. Идеал $\bar{I}(r) \subset \mathbb{K}[U]$ по определению состоит из всех многочленов G кольца $\mathbb{K}[U] = \mathbb{K}[u_{10}, \ldots, u_{rm}]$, удовлетворяющих при некотором натуральном M условиям

$$Gx_i^M \in (I, L_1, \ldots, L_r) \subset \mathbb{K}[X, U], \qquad 0 \le i \le m.$$

Идеал I кольца многочленов $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность равную размерности идеала I.

Идеал I кольца многочленов $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность равную размерности идеала I.
Показателем $\mathfrak{p}$ примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$.

Идеал I кольца многочленов $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность равную размерности идеала I.
Показателем $\mathfrak{p}$ примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$.
Под *размерностью* $\dim I$ однородного идеала I будем понимать его проективную размерность.

Идеал I кольца многочленов $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность равную размерности идеала I.
Показателем $\mathfrak{p}$ примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$.
Под *размерностью* $\dim I$ однородного идеала I будем понимать его проективную размерность.

Предложение 1

Пусть I – несмешанный однородный идеал кольца $\mathbb{K}[X]$, $r = \dim I + 1 \geq 1$. Пусть $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – несократимое примарное разложение, и для $j = 1, \dots, s$ положим $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j.

Идеал I кольца многочленов $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность равную размерности идеала I.
Показателем $\mathfrak{p}$ примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$.
Под *размерностью* $\dim I$ однородного идеала I будем понимать его проективную размерность.

Предложение 1

Пусть I – несмешанный однородный идеал кольца $\mathbb{K}[X]$, $r = \dim I + 1 \geq 1$. Пусть $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – несократимое примарное разложение, и для $j = 1, \dots, s$ положим $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j.
Тогда $\overline{I}(r)$ – главный идеал в кольце $\mathbb{K}[\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_r]$, и если $\overline{\mathfrak{p}}_j(r) = (F_j)$, то многочлен $F = F_1^{k_1} \cdots F_s^{k_s}$ является образующей идеала $\overline{I}(r)$.

Идеал I кольца многочленов $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность равную размерности идеала I.
Показателем $\mathfrak{p}$ примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$.
Под *размерностью* $\dim I$ однородного идеала I будем понимать его проективную размерность.

Предложение 1

Пусть I – несмешанный однородный идеал кольца $\mathbb{K}[X]$, $r = \dim I + 1 \geq 1$. Пусть $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – несократимое примарное разложение, и для $j = 1, \dots, s$ положим $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j.
Тогда $\overline{I}(r)$ – главный идеал в кольце $\mathbb{K}[\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_r]$, и если $\overline{\mathfrak{p}}_j(r) = (F_j)$, то многочлен $F = F_1^{k_1} \cdots F_s^{k_s}$ является образующей идеала $\overline{I}(r)$.

Образующая F главного идеала $\overline{I}(r)$ называется *ассоциированной формой или формой Чжоу* идеала I.

Характеристики идеала. Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение поля рациональных чисел, $\nu = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ с помощью его формы Чжоу F можно определить ряд характеристик:

Характеристики идеала. Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение поля рациональных чисел, $\nu = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ с помощью его формы Чжоу F можно определить ряд характеристик:

• размерность $\dim I$ - проективная размерность многообразия нулей I,

Характеристики идеала. Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение поля рациональных чисел, $\nu = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ с помощью его формы Чжоу F можно определить ряд характеристик:

• размерность $\dim I$ - проективная размерность многообразия нулей I,

• степень $\deg I = \deg_{\overline{u_1}} F$,

Характеристики идеала. Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение поля рациональных чисел, $\nu = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ с помощью его формы Чжоу F можно определить ряд характеристик:

• размерность $\dim I$ - проективная размерность многообразия нулей I,

• степень $\deg I = \deg_{\overline{u_1}} F$,

• логарифмическая высота $h(I)$ - логарифм классической высоты вектора коэффициентов многочлена F,

Характеристики идеала. Пусть $\mathbb{K}$ – конечное расширение поля рациональных чисел, $\nu = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Для каждого однородного несмешанного идеала I кольца $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ с помощью его формы Чжоу F можно определить ряд характеристик:

• размерность $\dim I$ - проективная размерность многообразия нулей I,

• степень $\deg I = \deg_{\overline{u_1}} F$,

• логарифмическая высота $h(I)$ - логарифм классической высоты вектора коэффициентов многочлена F,

• величина идеала I в произвольной точке $\overline{\omega}$ проективного m-мерного пространства над $\mathbb{C}$ определяется равенством $|I(\overline{\omega})| = |F_{\overline{u_i} = S^{(i)}\overline{\omega}}| \cdot |\overline{\omega}|^{-r \cdot \deg I}$, где $S^{(i)}, i = 1, \ldots, r$, кососимметрические матрицы с независимыми элементами $s_{jk}^{(i)}, 0 \leq j < k \leq m$. Под знаком $| \cdot |$ в первом сомножителе стоит многочлен от этих переменных. Абсолютная величина многочлена равна максимальному из модулей его коэффициентов.

Предложение 2

Пусть I *– несмешанный однородный идеал кольца* $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim I \geq 0$, $I = I_1 \cap \cdots \cap I_s$ *– несократимое примарное разложение,* $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j *– показатель примарного идеала* I_j*. Пусть* $\overline{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\overline{\omega} \neq 0$*. Тогда*

1. $\sum_{j=1}^{s} k_j \deg \mathfrak{p}_j = \deg I$;
2. $\sum_{j=1}^{s} k_j h(\mathfrak{p}_j) \leq h(I) + \nu m^2 \deg I$;
3. $\sum_{j=1}^{s} k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\overline{\omega})| \leq \ln |I(\overline{\omega})| + m^3 \deg I$.

Предложение 3

Пусть $I = (P)$ *– главный идеал в кольце* $\mathbb{K}[\overline{x}]$, *порожденный однородным многочленом* P, $\overline{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\overline{\omega} \neq 0$. *Тогда*

1) $\deg I = \deg P$,
2) $h(I) \leq h(P) + \nu m^2 \deg P$,
3) $\ln |I(\overline{\omega})| \leq \ln \|P\|_{\overline{\omega}} + 2m^2 \deg P$, *где* $\|P\|_{\overline{\omega}} = |P(\overline{\omega})|/|\overline{\omega}|^{\deg P}$.

Далее будем использовать обозначения

$$\|\overline{\omega} - \overline{\beta}\| = \frac{|\beta_j \cdot \omega_k - \beta_k \cdot \omega_j|}{|\overline{\omega}| \cdot |\overline{\beta}|}$$

Предложение 4

Пусть $\mathfrak{p}$ *– однородный простой идеал кольца* $\mathbb{K}[X]$, $\dim \mathfrak{p} \geq 0$; Q *– однородный многочлен из* $\mathbb{K}[X]$, $Q \notin \mathfrak{p}$. *Пусть также* $|\cdot| = |\cdot|_w$, $w \in \mathcal{M}$, *– абсолютное значение на* $\mathbb{K}$. *Существует однородный несмешанный идеал* $J \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$, *нули которого совпадают с нулями идеала* $(\mathfrak{p}, Q)$, $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1$, *такой, что*

1) $\deg J \leq \deg \mathfrak{p} \, \deg Q$;
2) $h(J) \leq h(\mathfrak{p}) \deg Q + h(Q) \deg \mathfrak{p} + \nu m(r+1) \deg \mathfrak{p} \, \deg Q$;
3) *если* $\overline{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$ *и* $\rho = \min \|\overline{\omega} - \overline{\beta}\|$, *где минимум по всем нулям* $\overline{\beta}$ *идеала* $\mathfrak{p}$ *в* $\mathbb{C}^{m+1}$, *то*

$$\ln |J(\overline{\omega})| \leq \ln \delta + h(Q) \deg \mathfrak{p} + h(\mathfrak{p}) \deg Q + +11\nu m^2 \deg \mathfrak{p} \, \deg Q,$$

$$\delta = \begin{cases} \|Q\|_{\overline{\omega}}, & \text{если } \rho < \|Q\|_{\overline{\omega}}, \\ |\mathfrak{p}(\overline{\omega})|, & \text{если } \rho \geq \|Q\|_{\overline{\omega}}. \end{cases}$$

При $r = 1$ *считаем* $|J(\overline{\omega})| = 1$.

Следствие 1

Если V – однородный многочлен кольца $\mathbb{K}[X]$ и $\overline{\omega}, \overline{\xi} \in \mathbb{C}^{m+1}$ – ненулевые точки, причем $V(\overline{\xi}) = 0$, то справедливо неравенство

$$\|V\|_{\overline{\omega}} \leq \|\overline{\omega} - \overline{\xi}\| \cdot e^{(2m+1)\deg V}.$$

Следствие 2

В обозначениях предложения 4 справедливо неравенство

$$|\mathfrak{p}(\overline{\omega})| \leq \rho \cdot e^{5m^2 \deg \mathfrak{p}}.$$

Теорема 1. *При выполнении технических условий степень трансцендентности поля* $\mathbb{L}$ не меньше, чем $\left[\frac{pq+p}{p+q}\right]$.

Теорема 1. *При выполнении технических условий степень трансцендентности поля* $\mathbb{L}$ не меньше, чем $\left[\frac{pq+p}{p+q}\right]$.

Эта теорема будет выведена из более общего утверждения, где мы используйте обозначения $m = pq + p$ и

$$\overline{\omega} = (1, a_1, \cdots, a_p, e^{a_1 b_1}, \cdots, e^{a_p b_q}) \in \mathbb{C}^{m+1}.$$

Теорема 3. *Пусть* r *— целое число,* $1 \leq r \leq \chi = \frac{pq+p}{p+q}$. *Тогда существует константа* $\mu_r = \mu_r(\overline{\omega}) > 0$ *такая, что для всех однородных несмешанных идеалов* $I \subset \mathbb{Q}[\overline{x}] = \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_m]$ *размерности* $\dim I = r - 1$, *выполняется неравенство*

$$\log |I(\overline{\omega})| \geq -S^{\chi}$$

для любого действительного S *с условием*

$$t(I) = \deg I + h(I) \leq \mu_r S^{\chi - r} (\log S)^{\frac{qr}{m}}.$$

Докажем сначала, что теорема 3 влечёт теорему 1. Пусть $\mathcal{E}$ простой идеал кольца $\mathbb{Q}[\overline{x}]$, порождённый всеми однородными многочленами $P(\overline{x}) \in \mathbb{Q}[\overline{x}]$, обращающимися в нуль в точке $\overline{\omega}$. Пусть $r = 1 + \mathrm{trdeg}\mathbb{L}$. Тогда $\dim\mathcal{E} = r - 1$. Если $r \leq \chi$, то по теореме 3 для достаточно больших S получаем $|\mathcal{E}(\overline{\omega})| > \exp(-S^{\chi}) > 0$. Но это противоречит неравенству из следствия 2 предложения 4, ведь $\overline{\omega}$ — нуль простого идеала $\mathcal{E}$. Значит, $r > \chi$ и это доказывает теорему 1.

Докажем сначала, что теорема 3 влечёт теорему 1. Пусть $\mathcal{E}$ простой идеал кольца $\mathbb{Q}[\overline{x}]$, порождённый всеми однородными многочленами $P(\overline{x}) \in \mathbb{Q}[\overline{x}]$, обращающимися в нуль в точке $\overline{\omega}$. Пусть $r = 1 + \mathrm{trdeg}\mathbb{L}$. Тогда $\dim\mathcal{E} = r - 1$. Если $r \le \chi$, то по теореме 3 для достаточно больших S получаем $|\mathcal{E}(\overline{\omega})| > \exp(-S^{\chi}) > 0$. Но это противоречит неравенству из следствия 2 предложения 4, ведь $\overline{\omega}$ — нуль простого идеала $\mathcal{E}$. Значит, $r > \chi$ и это доказывает теорему 1.

Ниже будет доказано, что для простых идеалов $\mathfrak{p}$ размерности $r - 1$ выполняется нижняя оценка, подобная оценке из теоремы 3, но с иной постоянной $\mu > 0$. Из оценки для простых идеалов получится оценка теоремы 3. Далее немного подробнее мы рассматриваем общий шаг индукции при $r \ge 2$.

Предложение. *Предположим, что утверждение теоремы 3 выполняется для всех однородных несмешанных идеалов размерности* $r-2$. *Тогда существует достаточно малая постоянная* $\mu > 0$, *зависящая только от* a_i, b_j, μ_{r-1} *такая, что для любого однородного простого идеала* $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\overline{x}], \dim\mathfrak{p} = r-1$, *выполняется неравенство*

$$\log \mid \mathfrak{p}(\overline{\omega}) \mid \geq -S^{\chi}$$

где S *— любое действительное число, для которого*

$$t(\mathfrak{p}) \leq \mu S^{\chi - r} (\log S)^{\frac{qr}{m}}.$$

Предположим, что теорема 3 верна для идеалов размерности $r-2$. Тогда существует постоянная μ, указанная в предложении. Положим $\mu_r = \mu \cdot (2m)^{-2}$. Если для идеалов размерности $r-1$ утверждение теоремы 3 неверно, то существует однородный несмешанный идеал I размерности $r-1$ и число D такие, что

$$t(I) \leq \mu_r D^{\chi - r} (\log D)^{\frac{qr}{m}}, \qquad \log \mid I(\overline{\omega}) \mid < -D^{\chi}. \qquad (1)$$

Докажем, что неравенства (1) противоречат сформулированному предложению. Пусть $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s$ простые идеалы, ассоциированные с идеалом I из (1) и $k_1, \cdots, k_s$ показатели соответствующих примарных компонент I. Из предложения 2 следуют неравенства

$$\sum_{j=1}^{s} k_j t(\mathfrak{p}_j) \leq 2m^2 t(I), \quad \sum_{j=1}^{s} k_j \log \mid \mathfrak{p}_j(\overline{\omega}) \mid \leq \log \mid I(\overline{\omega}) \mid + m^3 t(I).$$

Если каждый идеал $\mathfrak{p}_j$ удовлетворяет неравенству

$$\log \mid \mathfrak{p}_j(\overline{\omega}) \mid \geq -\frac{1}{\mu} D^r (\log D)^{-\frac{qr}{m}} \, t(\mathfrak{p}_j)$$

тогда имеем

$$\log |I(\overline{\omega})| \geq \sum_{j=1}^{s} k_j \log \mid \mathfrak{p}_j(\overline{\omega}) \mid - m^3 t(I) \geq -\frac{1}{\mu} D^r (\log D)^{-\frac{qr}{m}} \cdot$$

$$\sum_{j=1}^{s} k_j \, t(\mathfrak{p}) - m^3 t(I) \geq -\frac{3m^2}{\mu} D^r (\log D)^{-\frac{qr}{m}} \, t(I) \geq -\frac{3}{4} D^{\chi}.$$

Полученное неравенство $\log|I(\overline{\omega})| \geq -\frac{3}{4}D^{\chi}$ противоречит (1), поэтому можно найти простой идеал $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, который удовлетворяет

$$t(\mathfrak{p}) \leq 2m^2 t(I) \leq \frac{\mu}{2} D^{\chi - r} (\log D)^{\frac{qr}{m}},$$

$$\log \mid \mathfrak{p}(\overline{\omega}) \mid < -\frac{1}{\mu} D^{r} (\log D)^{-\frac{qr}{m}} t(\mathfrak{p}). \quad (2)$$

Определим параметр S равенством $\frac{1}{\mu} D^{r} (\log D)^{-\frac{qr}{m}} t(\mathfrak{p}) = S^{\chi}$. Тогда

$$\log \mid \mathfrak{p}(\overline{\omega}) \mid < -S^{\chi}. \tag{7.8}$$

$$t(\mathfrak{p}) = \mu S^{\chi} D^{-r} (\log D)^{\frac{qr}{m}} < \mu S^{\chi - r} (\log S)^{\frac{qr}{m}} \tag{7.9}$$

Два последних неравенства противоречат предложению, что доказывает шаг индукции, а вместе с ним и теорему 3.

Перейдем к доказательству предложения, предполагая, что в случае $r \geq 2$ утверждение теоремы 3 справедливо для всех однородных и несмешанных идеалов размерности меньше $r-1$.

Перейдем к доказательству предложения, предполагая, что в случае $r \geq 2$ утверждение теоремы 3 справедливо для всех однородных и несмешанных идеалов размерности меньше $r-1$. Фиксируем число, $\lambda >> \mu_{r-1}^{-1}$. Для доказательства Предложения достаточно показать, что числа S для которых существует однородный простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Q}[x_0, \cdots, x_m], \dim\mathfrak{p} = r-1$ с условиями

$$t(\mathfrak{p}) \leq \lambda^{-m-1} S^{\chi-r} (\log S)^{\frac{qr}{m}}, \qquad \log \mid \mathfrak{p}(\overline{\omega}) \mid < -S^{\chi}$$

ограничены сверху. После этого можно заменить λ^{-m-1} меньшей положительной константой μ.

Перейдем к доказательству предложения, предполагая, что в случае $r \geq 2$ утверждение теоремы 3 справедливо для всех однородных и несмешанных идеалов размерности меньше $r-1$. Фиксируем число, $\lambda >> \mu_{r-1}^{-1}$. Для доказательства Предложения достаточно показать, что числа S для которых существует однородный простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Q}[x_0, \cdots, x_m], \mathrm{dim}\mathfrak{p} = r-1$ с условиями

$$t(\mathfrak{p}) \leq \lambda^{-m-1} S^{\chi-r} (\log S)^{\frac{qr}{m}}, \qquad \log \mid \mathfrak{p}(\overline{\omega}) \mid < -S^{\chi}$$

ограничены сверху. После этого можно заменить λ^{-m-1} меньшей положительной константой μ.

Определим параметр T равенством

$$2\lambda^m T^m \log T = \min(S^\chi, \log\frac{1}{\rho}).$$

где ρ — расстояние от точки $\overline{\omega}$ до многообразия нулей идеала $\mathfrak{p}$.

Определим параметр T равенством

$$2\lambda^m T^m \log T = \min(S^{\chi}, \log\frac{1}{\rho}).$$

где ρ — расстояние от точки $\overline{\omega}$ до многообразия нулей идеала $\mathfrak{p}$.
Лемма 1. *Для любого однородного полинома* $P \in \mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\overline{x}]$ *с условием* $t(P) \leq \lambda^{p+q} T^{p+q} (\log T)^{\frac{1}{q+1}}$ *выполняется неравенство*

$$\| P \|_{\overline{\omega}} \leq \exp\{-\lambda^m T^m \log T\}.$$

Определим параметр T равенством

$$2\lambda^m T^m \log T = \min(S^\chi, \log\frac{1}{\rho}).$$

где ρ — расстояние от точки $\overline{\omega}$ до многообразия нулей идеала $\mathfrak{p}$.

Лемма 1. *Для любого однородного полинома $P \in \mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\overline{x}]$ с условием $t(P) \leq \lambda^{p+q} T^{p+q} (\log T)^{\frac{1}{q+1}}$ выполняется неравенство*

$$\parallel P \parallel_{\overline{\omega}} \leq \exp\{-\lambda^m T^m \log T\}.$$

Лемма 2. *Если $P \in \mathbb{Q}[\overline{x}], P \notin \mathfrak{p}$ — однородный многочлен и $t(P) \leq \lambda^{p+q} T^{p+q} (\log T)^{\frac{1}{q+1}}$, то*

$$\parallel P \parallel_{\overline{\omega}} \geq \exp\{-\frac{1}{2} T^m \log T\}.$$

Определим параметр T равенством

$$2\lambda^m T^m \log T = \min(S^\chi, \log\frac{1}{\rho}).$$

где ρ — расстояние от точки $\overline{\omega}$ до многообразия нулей идеала $\mathfrak{p}$.

Лемма 1. *Для любого однородного полинома $P \in \mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\overline{x}]$ с условием $t(P) \le \lambda^{p+q} T^{p+q} (\log T)^{\frac{1}{q+1}}$ выполняется неравенство*

$$\| P \|_{\overline{\omega}} \le \exp\{-\lambda^m T^m \log T\}.$$

Лемма 2. *Если $P \in \mathbb{Q}[\overline{x}], P \notin \mathfrak{p}$ — однородный многочлен и $t(P) \le \lambda^{p+q} T^{p+q} (\log T)^{\frac{1}{q+1}}$, то*

$$\| P \|_{\overline{\omega}} \ge \exp\{-\frac{1}{2} T^m \log T\}.$$

Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ простой идеал кольца $\mathbb{Q}[\overline{x}]$, порождённый всеми однородными многочленами $P(\overline{x})$, которые обращаются в нуль в точке $\overline{\omega}$. Тогда $\mathcal{E} \subset \mathfrak{p}$.

Лемма 3

$K = \left[\lambda T^{q+1}\right]$, $L = \left[T^{p-1}(\log T)^{\frac{1}{q+1}}\right]$, $W = \left[T^{p+q}(\log T)^{-\frac{q}{q+1}}\right]$.

Если S достаточно большое число, то существуют однородные многочлены $A_{\overline{k}} \in \mathbb{Z}[\overline{x}], \overline{k} = (k_1, \cdots, k_p), 0 \le k_i < K$ такие, что

1. $t(A_{\overline{k}}) \le \lambda^2 T^{p+q}(\log T)^{\frac{1}{q+1}}$
2. *существует индекс $\overline{k}_0$ такой, что $A_{\overline{k}_0} \notin \mathfrak{p}$*
3. *функция*

$$F(z) = \sum_{\overline{k}} A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) e^{(k_1 a_1 + \cdots + k_p a_p)z}$$

удовлетворяет неравенствам

$$| F^{(w)}(\ell_1 b_1 + \cdots + \ell_q b_q) | < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^m T^m \log T)$$

для всех w и ℓ_j с условиями

$$0 \le w < W, \quad 0 \le \ell_j < L, \quad 1 \le j \le q.$$

Лемма 4

Пусть $L_1 = \lambda^p L$. *Тогда*

$$E = \max_{\substack{0 \le w < W \\ 0 \le \ell_j < L_1}} \mid F^{(w)}(\ell_1 b_1 + \cdots + \ell_q b_q) \mid \le \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^m T^m \log T\}$$

Лемма 4

Пусть $L_1 = \lambda^p L$. *Тогда*

$$E = \max_{\substack{0\le w<W\\ 0\le \ell_j<L_1}} \mid F^{(w)}(\ell_1 b_1 + \cdots + \ell_q b_q) \mid \le \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^m T^m \log T\}$$

Интерполяционная формула Эрмита: Пусть

$$\{\ell_1 b_1 + \cdots + \ell_q b_q, 0 \le \ell_j < L\} = \{\xi_1, \cdots, \xi_{L^d}\}.$$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{L^d} \sum_{w=0}^{W-1} \frac{F^{(w)}(\xi_k)}{w!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \prod_{\ell=1}^{L^d} \left(\frac{z-\xi_\ell}{t-\xi_\ell}\right)^W \frac{(t-\xi_k)^w}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \prod_{\ell=1}^{L^d} \left(\frac{z-\xi_\ell}{t-\xi_\ell}\right)^W \frac{F(t)}{t-z} dt \quad (3)$$

$$\Gamma : \mid t \mid = K^{p-1}, \qquad \Gamma_k : \mid \zeta - \xi_k \mid = \tfrac{1}{2}\exp\{-\gamma L \log L\}.$$

Лемма 5

Предположим, что $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ *и* $\{\beta_0, \cdots, \beta_{s-1}\}$ *— множества из* n *и* s *различных чисел и*

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{\alpha_j z}, \qquad c_j \in \mathbb{C}.$$

$$C = \max_{0\le i<n} | c_j |, \qquad E = \max_{\substack{0\le i<w\\0\le i<s}} | F^{(i)}(\beta_j) |$$

$$a_0 = \min_{0\le i<j<n}(| \alpha_i - \alpha_j |, 1), \qquad b_0 = \min_{0\le i<j<s}(| \beta_i - \beta_j |, 1).$$

$$a_1 = \max_{0\le j<n}(| \alpha_j |, 1), \qquad b_1 = \max_{0\le j<s}(| \beta_j |, 1)$$

Если $\quad sw \ge 2n + 13a_1 b_1, \quad$ *то*

$$C \le s\sqrt{n!}e^{7a_1 b_1}\left(\frac{1}{2a_0 b_1}\right)^{n-1}\left(\frac{72 b_1}{b_0\sqrt{s}}\right)^{sw} E.$$

Для завершения доказательства индуктивного шага применим лемму 5 к функция $F(z)$, построенной в лемме 3 с

$$n = K^p, \quad s = L_1^q, \quad w = W, \quad E = \exp(-\frac{1}{2}\lambda^m T^m \log T).$$

Получаем

$$\max_{0 \leq k_j < K} \mid A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) \mid \leq \exp(-\frac{1}{3}\lambda^m T^m \log T).$$

Но по конструкции имеем

$$A_{\overline{k}_0}(\overline{x}) \notin \mathfrak{p}.$$

Применяя к этому многочлену лемму 2, находим

$$|A_{\overline{k}_0}(\overline{\omega})| \geq \exp(-\frac{1}{2} T^m \log T).$$

Полученные неравенства противоречивы. Это завершает доказательство Предложения и теоремы 3.

Некоторые открытые вопросы.

1. Исключение технических условий из конечного результата - теоремы 3 есть важная проблема теории трансцендентных чисел. Р. Тайдеман сделал это в 1970г. для случая степени трансцендентности 2. Общий случай - открытая проблема.

Некоторые открытые вопросы.

1. Исключение технических условий из конечного результата - теоремы 3 есть важная проблема теории трансцендентных чисел. Р. Тайдеман сделал это в 1970г. для случая степени трансцендентности 2. Общий случай - открытая проблема.

2. Эквивалентная переформулировка 7-й проблемы Гильберта: если α и β алгебраические числа, натуральные логарифмы которых линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, то эти логарифмы не могут быть связаны никаким однородным многочленом с рациональнысм коэффициентами. Два вопроса в этой связи.

1). (Н.И. Фельдман, 1982) Могут ли логарифмы двух алгебраических чисел быть связанными многочленом $y - x^2$?

2). (Th. Schneider, 1957) В каких ситуциях логарифмы четырёх алгебраических чисел не могут быть связаны многочленом $x_0x_1 - x_3x_4$?