

О сильной и слабой ассоциированности некоторых функциональных классов¹

В.Д. Степанов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: stepanov@mi-ras.ru

Семинар по теории функций действительного переменного МГУ

Аннотация

Обозначим $\mathfrak{M}(I)$ класс всех функций на $I := (0, \infty)$, измеримых по Лебегу. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ нормированное пространство измеримых функций на I , X^* – двойственное (сопряженное) к X пространство всех линейных непрерывных функционалов. Классической задачей функционального анализа является задача о представлении элементов X^* в конкретной форме, этому посвящены теоремы Ф. Рисса.

X называется идеальным, если из условия $|f| \leq |g|$ п.в. на I и $g \in X$ следует $f \in X$ и $\|f\| \leq \|g\|$. Пусть

$$\mathfrak{D}_X := \left\{ g \in \mathfrak{M}(I) : \int_I |fg| < \infty \text{ для всех } f \in X \right\}. \quad (1)$$

$\forall g \in \mathfrak{D}_X$ определим функционалы

$$\mathbf{J}_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_X} \text{ и } J_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_X}$$

и ассоциированные пространства

$$X'_s := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_s} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\},$$

$$X'_w := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_w} := J_X(g) < \infty\},$$

которые мы называем “сильными” и “слабыми” ассоциированными пространствами, соответственно.

Для идеальных пространств с свойством Фату известно, что $(X'_s)'_s = X$, $J_X(g) = \mathbf{J}_X(g)$ и, следовательно, $X'_s = X'_w$. Для неидеальных пространств это, вообще говоря, не так, функционалы $J_X(g)$ и $\mathbf{J}_X(g)$ могут быть различными.

В результате возникает задача описания “дважды ассоциированных” пространств. Поскольку X'_s идеальное, то $[X'_s]'_s = [X'_s]'_w$, но к этому добавляются еще $[X'_w]'_s$ и $[X'_w]'_w$.

В докладе эта задача рассматривается для весовых пространств Соболева первого порядка и неидеальных пространств Чезаро и Копсона.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект 19-01-00087.