

# О сильной и слабой ассоциированности некоторых функциональных классов<sup>1</sup>

В.Д. Степанов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: stepanov@mi-ras.ru

Семинар по теории функций действительного переменного МГУ

## Аннотация

Обозначим  $\mathfrak{M}(I)$  класс всех функций на  $I := (0, \infty)$ , измеримых по Лебегу. Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  нормированное пространство измеримых функций на  $I$ ,  $X^*$  – двойственное (сопряженное) к  $X$  пространство всех линейных непрерывных функционалов. Классической задачей функционального анализа является задача о представлении элементов  $X^*$  в конкретной форме, этому посвящены теоремы Ф. Рисса.

$X$  называется идеальным, если из условия  $|f| \leq |g|$  п.в. на  $I$  и  $g \in X$  следует  $f \in X$  и  $\|f\| \leq \|g\|$ . Пусть

$$\mathfrak{D}_X := \left\{ g \in \mathfrak{M}(I) : \int_I |fg| < \infty \text{ для всех } f \in X \right\}. \quad (1)$$

$\forall g \in \mathfrak{D}_X$  определим функционалы

$$\mathbf{J}_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_X} \text{ и } J_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_X}$$

и ассоциированные пространства

$$X'_s := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_s} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\},$$

$$X'_w := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_w} := J_X(g) < \infty\},$$

которые мы называем “сильными” и “слабыми” ассоциированными пространствами, соответственно.

Для идеальных пространств с свойством Фату известно, что  $(X'_s)'_s = X$ ,  $J_X(g) = \mathbf{J}_X(g)$  и, следовательно,  $X'_s = X'_w$ . Для неидеальных пространств это, вообще говоря, не так, функционалы  $J_X(g)$  и  $\mathbf{J}_X(g)$  могут быть различными.

В результате возникает задача описания “двойды ассоциированных” пространств. Поскольку  $X'_s$  идеально, то  $[X'_s]'_s = [X'_s]'_w$ , но к этому добавляются еще  $[X'_w]'_s$  и  $[X'_w]'_w$ .

В докладе эта задача рассматривается для весовых пространств Соболева первого порядка и неидеальных пространств Чезаро и Копсона.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект 19-01-00087.