

# Распределенный рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации в задаче отслеживания изменяющихся параметров при произвольных внешних помехах

О.Н. Границин

Санкт-Петербургский государственный университет

# Искусственный интеллект — принятие решений в реальном времени в условиях неопределенности

Критические факторы:

- скорость — надо принять и реализовать решение до наступления следующего «разрушительного» события
- интеллект (природный и/или искусственный) — надо достичь цели в условиях неопределенности

Критическая технология:

- Стохастическое программирование и мультиагентные технологии для поддержки (или замены) процесса принятия решения человеком

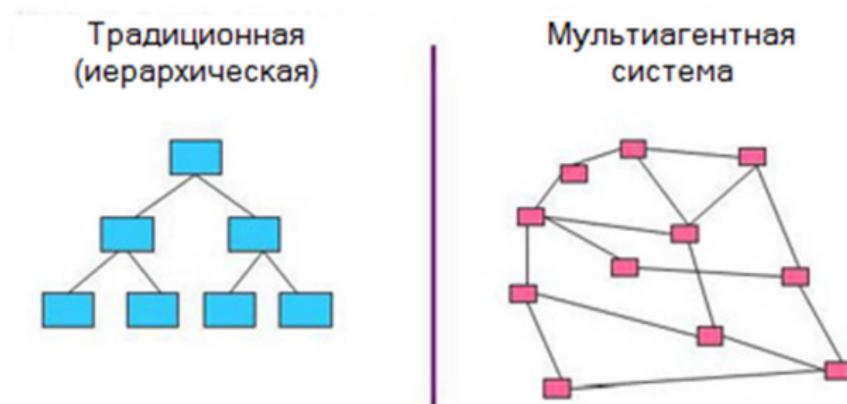
# Стохастическое программирование

Стохастичность — греческое слово (*στοχαστικός*)

- целиться, метить (целиться во что (в кого)-либо)
- стремиться к тому, чтобы судьями были самые влиятельные люди
- применяться, приспособляться
- умозаключать, судить, догадываться, разгадывать (догадываться о том, что требуется; заключать на основании чего-либо; путем догадок)

*Стохастическое программирование* — подход в математическом программировании, позволяющий учитывать неопределённость в оптимизационных моделях

# Мультиагентные системы (начиная с 1990x)



В качестве основы были взяты достижения в следующих областях:

- системы искусственного интеллекта (Artificial Intelligence)
- параллельные вычисления (Parallel Computing)
- распределенное решение задач (Distributed Problem Solving)

# Почти произвольные ограниченные помехи. Линейный случай

- Ганичин О.Н., Фомин В.Н. Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // Автоматика и телемеханика, 1986, №2, с.100–112.
- Goldenshluger A.V., Polyak B.T. Estimation of regression parameters with arbitrary noise // Mathematical Methods of Statistics, 1993, vol. 2, No. 1, p. 18–29.
- Granichin O.N. Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. on Autom. Contr., v. 49, oct. 2004, pp.1830–1835.
- Fedin D.S., Granichin O.N., Dedkov Yu.S., Molodtsov S.L. Method of measurements with random perturbation: application in photoemission experiments // Review of Scientific Instruments. 79, 036103. 2008.

# Адаптивное управление с использованием пробных сигналов

Рассмотрим объект управления (ОУ):

$$A_\star(z^{-1})y_t = B_\star(z^{-1})u_t + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

где

$$A_\star(\lambda) = 1 + a_\star^{(1)}\lambda + \dots + a_\star^{(n_a)}\lambda^{n_a}, \quad B_\star(\lambda) = b_\star^{(l)}\lambda^l + b_\star^{(l+1)}\lambda^{(l+1)} + \dots + b_\star^{(n_b)}$$

$\tau_\star = \text{col}(a_\star^{(1)}, \dots, a_\star^{(n_a)}, b_\star^{(l)}, \dots, b_\star^{(n_b)})$  — вектор параметров, некоторые из которых неизвестны

ЦУ:  $\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} |y_t| \rightarrow \min, \sup_t |y_t| + |u_t| < \infty$

(Ганичин, Фомин АиТ 1986)

## Рандомизация стратегии управления

$$s \in \mathbb{N}, N = s \cdot N_\Delta$$

$$u_{sn+i-l} = \begin{cases} \Delta_n + \bar{u}_{sn-l} & i = 0, \\ \bar{u}_{sn+i-l}, & i = 1, 2, \dots, s-1, \end{cases} \quad n = 0, \dots, N_\Delta - 1,$$

$$\bar{u}_t = \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, \bar{u}_{t-1}, \dots), t \geq 0, \bar{u}_{-k} = 0, k > 0.$$

$\Delta_n$  — измеримое пробное случайное возмущение

Например,  $\Delta_n = \begin{cases} +1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases}$

**A1.** Можно выбрать  $\Delta_n$  и этот выбор не повлияет на внешнюю помеху  $v_{sn}, \dots, v_{s(n+1)-1}$ .

## Перепараметризация модели

Можно переписать модель (1) в виде линейной регрессии

$$y_{sn+k-1} + \Delta_n \theta_*^{(k)} + \bar{v}_{sn+k-1} = \Delta_n \theta_*^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_*^{(k-i)} \bar{u}_{sn-l+i} + \dots,$$

с входами  $\Delta_n$  и регрессорами  $\theta_*^{(k)}$ ,  $n = 1, \dots, N_\Delta$ ,  $k = 1, \dots, s$ .

$$\theta_* = \theta(\tau_*), \theta(\tau) = \mathbb{A}^{-1}(\tau)\mathbb{B}(\tau),$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_*^{(1)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_*^{(2)} & a_*^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_*^{(n_a)} & \dots & a_*^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_*^{(l)} \\ \vdots \\ b_*^{(n_b)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Границин Фомин АиТ 1986)

Заметим, что  $\Delta_n$  и  $\bar{v}_{sn+k-1}$  независимы, если есть возможность выбора  $\Delta_n$ .

## Как выбирать $s$ ?

**A2.**  $s: \exists \tau(\theta) = \theta^{-1}(\tau)$

$s = n_a + n_b$  если полиномы  $A_*(\lambda)$  и  $B_*(\lambda)$  взаимно просты

*Пример* Рассмотрим объект управления второго порядка

$$y_t + a_*^{(1)}y_{t-1} + y_{t-2} = b_*^{(1)}u_{t-1} + 1.6u_{t-2} + v_t,$$

$t = 1, 2, \dots, T$ , с неизвестными коэффициентами  $a_*^{(1)}$  and  $b_*^{(1)} \neq 0$ .

Обозначим

$$\tau_* = \text{col}(a_*^{(1)}, b_*^{(1)}).$$

Пусть  $s = 2$ , — вектор  $\theta_*$  обратной функции  $\tau(\theta)$ :

$$\theta_* = \begin{pmatrix} b_*^{(1)} \\ 1.6 - a_*^{(1)}b_*^{(1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \tau(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1.6 - \theta^{(2)}}{\theta^{(1)}} \\ \theta^{(1)} \end{pmatrix}.$$

# Стохастическая аппроксимация с возмущением на входе

$$\hat{\theta}_n^{(i)} = \hat{\theta}_{n-1}^{(i)} - \frac{1}{n} \Delta_n (u_{sn-i} \hat{\theta}_{n-1}^{(i)} - y_{sn+i-1}), \quad i \in [1 \dots s] \quad (2)$$

## Theorem

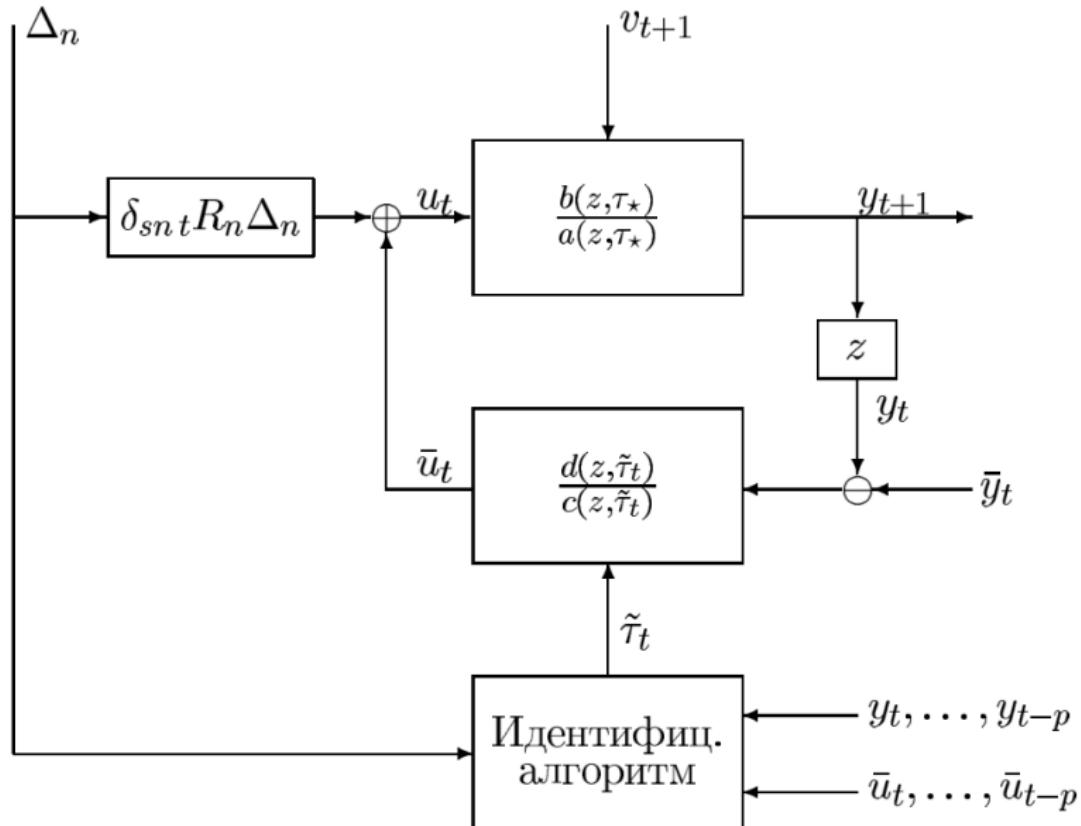
Если условия **A1–A2** выполнены и

$$2\sigma_\Delta^2 > 1, \mathbb{E}\{v_t^2\} \leq \sigma_v^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^{-1}}{n} = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^{-2}}{n^2} < \infty$$

верно то для произвольного начального вектора  $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^s$  алгоритм (2) гарантирует оценки  $\{\hat{\theta}_n\}$  такие, что для произвольного  $\rho > 0$  истинны следующие границы в среднеквадратическом смысле:

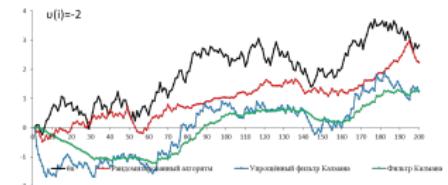
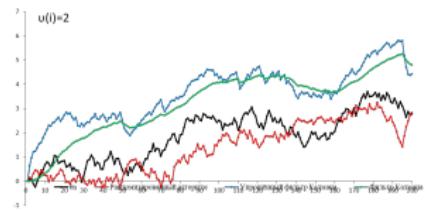
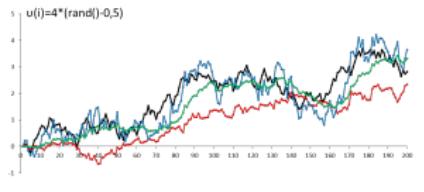
$$\mathbb{E}\{|\hat{\theta}_n^{(i)} - \theta_*^{(i)}|^2\} \leq \frac{\beta_n^{-1}}{n} \frac{\rho C_{\bar{u}}^2 + \sigma_{i,\bar{v}}^2}{2\sigma_\Delta^2 - 1} + o\left(\frac{\beta_n^{-1}}{n}\right)$$

## Диаграмма: адаптивное управление



# Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // TAC 2004

$$\hat{x}_{n+1} = A_n \hat{x}_n - \alpha A_n \Gamma(\varphi_n - E\{\varphi_n\})(\varphi_n^T \hat{x}_n - y_n).$$



## Помехи

$$u_n = 4,0 * (\text{rand}() - 0,5)$$

$$u_n = 0,1 * \sin(n) + 1,9 * \text{sign}(50 - n \bmod 100)$$

$$u_n = 2,0$$

$$u_n = -2,0$$

RMSE Упр. ФК

ФК

0,5478

0,2571

0,2603

0,5332

2,8912

2,0125

0,6132

3,1256

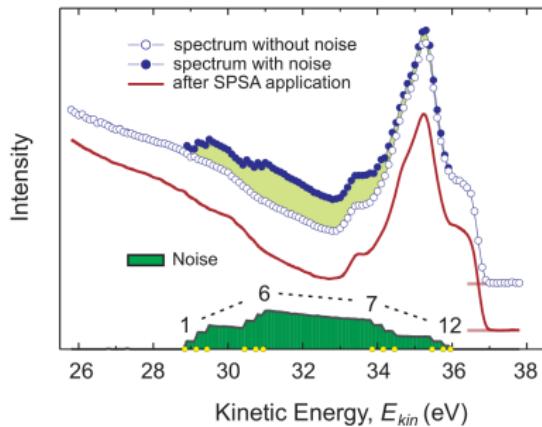
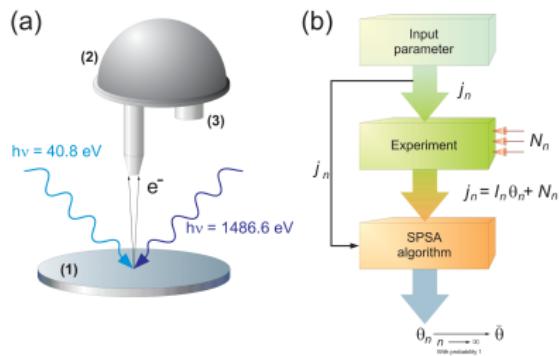
2,2248

0,6812

3,6812

3,6020

# Method of measurements with random perturbation: application in photoemission experiments // RSI 2008



# Почти произвольные ограниченные помехи. Общий случай

- Граничин О.Н. Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленинградского университета, сер. 1, 1989, вып. 1, №1, с.19–21.
- Polyak B.T., Tsybakov A.B. On stochastic approximation with arbitrary noise (the KW case) / In: Topics in Nonparametric Estimation. Khasminskii R.Z. eds. // Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence, 1992, No. 12, pp. 107–113.
- Граничин О.Н. Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика, 1992, №2, с. 97–104.
- Граничин О.Н. Оценивание точки минимума неизвестной функции, наблюдаемой на фоне зависимых помех // Проблемы передачи информации, 1992, №2, с.16–20.
- Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах — М.: Наука. 2003.

**ОБ ОДНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ РЕКУРРЕНТНОМ ПРОЦЕДУРЕ  
ПРИ ЗАВИСИМЫХ ПОМЕХАХ В НАБЛЮДЕНИИ,  
ИСПОЛЬЗУЮЩЕМ НА ВХОДЕ ПРОБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ**

Введение. Широко известна задача определения корня  $x_0$  уравнения  $b(x)=0$ , если в эксперименте с номером  $t (t=1, 2, \dots)$  доступным наблюдению для исследователя является измерение функции  $b(x)$  с аддитивной помехой  $\xi(t)$ , т. е. величина  $b(X(t)) + \xi(t)$ , где  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  — выбираемое исследователем значение аргумента. Роббинсона и Монро для решения этой задачи была предложена следующая рекуррентная процедура (см. [1]):

$$X(t+1) = X(t) + \gamma(t) [b(X(t)) + \xi(t)], \quad (1)$$

где  $\{\gamma(t)\}$  — детерминированная последовательность положительных чисел (коэффициентов).

К настоящему времени вопрос об условиях сходимости процедуры (1) к точке  $x_0$  достаточно хорошо изучен (см., например, [2, 3]), но при этом для сходимости процедуры в случае зависимых возмущений  $\xi(t)$  практически во всех работах требуется, чтобы зависимость между случайными величинами  $\xi(t)$  и  $\xi(t')$  в той или иной мере ослабевала при увеличении разности аргументов  $|t - t'| \rightarrow \infty$ . Например, в работах [4, 5] рассматриваются некоторые условия на последовательность помех, называемые условиями сильного перемешивания, проверка которых на практике весьма затруднительна.

В случае, когда трудно утверждать что-либо существенное о свойствах зависимости помех в [6], для «обогащения» последовательности наблюдений предложено подавать на вход «пробное» возмущение, статистические свойства которого известны. В [7–9] предложено несколько алгоритмов стохастической аппроксимации с возмущением на входе для задачи идентификации линейного динамического объекта, функционирующего в условиях внешних возмущений, для которых, используя маркингальные методы, доказана состоятельность оценок.

Можно несколько изменить процедуру (1), включив в нее пробные возмущения, как это предлагается, например, в [7, 8]. В данной работе доказывается, что при этом полученная процедура сходится к стационарной точке функции  $b(x)$ .

Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе. Предположим, что некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция  $b(x)$  задана на компактном множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим следующую задачу: определить корень уравнения  $b'(x) = 0$ , если в эксперименте с номером  $t$  ( $t=1, 2, \dots$ ) доступным наблюдению для исследователя является измерение функции  $b(x)$  с аддитивной помехой  $\xi(t)$ , т. е. величина  $b(X(t)) + \xi(t)$ , где  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  — выбираемое исследователем значение аргумента.

Для формирования последовательности оценок  $X(t)$  ( $t=1, 2, \dots$ ) воспользуемся алгоритмом

$$X(t+1) = P_D(X(t)) + \gamma(t) w(t) [b(X(t)) + b(t) w(t) + \xi(t)], \quad X(0) \in D, \quad (2)$$

в котором  $\{w(t)\}_{t=0}^\infty$  — последовательность центрированных, одинаково распределенных, ограниченных, независимых случайных величин, называемых пробными возмущениями:

$$\{w(t)\} \leq C_w, \quad Ew(t) = 0, \quad Ew^2(t) = s_w^2 > 0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

$E$  — знак математического ожидания,  $\{t\}_{t=0}^\infty$  и  $\{w(t)\}_{t=0}^\infty$  — детермини-

# Оптимизация функционала среднего риска

Пусть  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$  — точки измерений

$$y_t = f(x_t, w_t) + v_t, \quad (3)$$

где  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$w_t$  — случайный вектор,  $v_t$  — произвольная внешняя помеха.

Задача стохастического программирования:

$$F(x) = \int f(x, w) P(dw) \rightarrow \min_x. \quad (4)$$

## Конечно-разностный подход

Процедура Кифера-Вольфовича

Число наблюдений на итерации  $M = 2d$

$$\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} (\mathbf{Y}_n^+ - \mathbf{Y}_n^-),$$

$$x_n^{(i,\pm)} = \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_i$$

$$\mathbf{Y}_n^\pm = \begin{pmatrix} f(x_n^{(1,\pm)}, w_n^{(1,\pm)}) + v_n^{(1,\pm)} \\ f(x_n^{(2,\pm)}, w_n^{(2,\pm)}) + v_n^{(2,\pm)} \\ \vdots \\ f(x_n^{(d,\pm)}, w_n^{(d,\pm)}) + v_n^{(d,\pm)} \end{pmatrix}$$

# Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации

Сокращение числа наблюдений до 1 или 2 вместо  $2d$  (!)

Алгоритм с одним измерением

$$x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, \quad \Delta_n = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

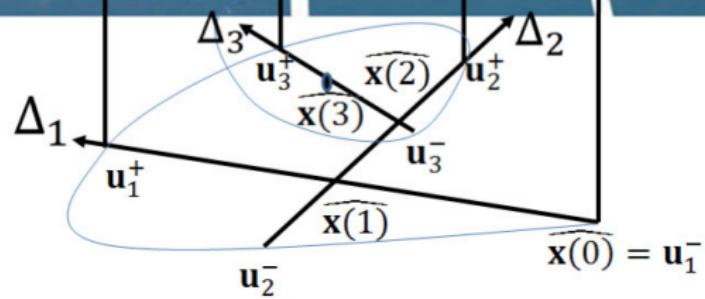
$$y_n = f(x_n, w_n) + v_n$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n$$

Алгоритм с двумя измерениями

$$x_n^\pm = \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n^\pm \Delta_n, \quad y_n^\pm = f(x_n^\pm, w_n^\pm) + v_n^\pm$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n^+ + \beta_n^-} \mathcal{K}_n(\Delta_n) (y_n^+ - y_n^-)$$



# Преимущества алгоритмов РСА

- Состоятельность при почти произвольных внешних помехах [Границин, 1989, 1992, 2002]
- Асимптотически-оптимальная скорость сходимости [Поляк Цыбаков, 1990]
- Минимальное число наблюдений на итерации [Spall, 1992, 1997]
- Применимость в задаче об отслеживании изменений параметров [Granichin et al., 2009, 2015]
- «Естественная» реализация на квантовом компьютере [Границин, Сысоев, 2006] или в мультиагентных технологиях

# Обоснование «псевдоградиентности» при произвольных внешних помехах

$$\begin{aligned} E\{\hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \Delta_n y_n | \mathcal{F}_{n-1}\} &= \\ = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} (E\{\Delta_n f(x_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} + E\{\Delta_n\} E\{v_n | \mathcal{F}_{n-1}\}) &= \\ = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} E\{\Delta_n f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} &\approx \\ \approx \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} E\{\Delta_n f(\hat{\theta}_{n-1}) + \frac{\beta_n \Delta_n \Delta_n^T \nabla f(\hat{\theta}_{n-1})}{2} | \mathcal{F}_{n-1}\} &= \\ = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2} \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) & \end{aligned}$$

# Отслеживание изменений параметров (трекинг)

- Granichin O., Amelina N. Simultaneous perturbation stochastic approximation for tracking under unknown but bounded disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, issue 6, June 2015, pp. 1653-1658.
- Granichin O., Volkovich V., Toledano-Kitai D. Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining / Intelligent Systems Reference Library, vol. 67, Springer-Verlag: Heidelberg New York Dordrecht London. 2015. 251 p.
- Erofeeva V., Granichin O., Tursunova M., Sergeenko, and Jiang Y. Accelerated simultaneous perturbation stochastic approximation for tracking under unknown-but-bounded disturbances // Proc. of the 2022 American Control Conference (ACC), Atlanta, USA, June 8-10, 2022, pp. 1582-1587

## PCA с постоянным размером шага

Пусть  $\Xi$  — множество,  $\{f_\xi(x, w)\}_{\xi \in \Xi}$  — семейство дифференцируемых функций

$$y_t = f_{\xi_t}(x_t, w_t) + v_t$$

$$F_t(x) = \int f_{\xi_t}(x, w_t) P(dw_t) P(d\xi_t) \rightarrow \min_x \quad (5)$$

Граничин и др. (2009, 2015) PCA с постоянным размером шага

$$\alpha_n = \alpha > 0$$

Пример:

$$x_n = x_{n-1} + \zeta_n, \quad x_n \in \mathbb{R}^d$$

# Оценивание положения множества целей

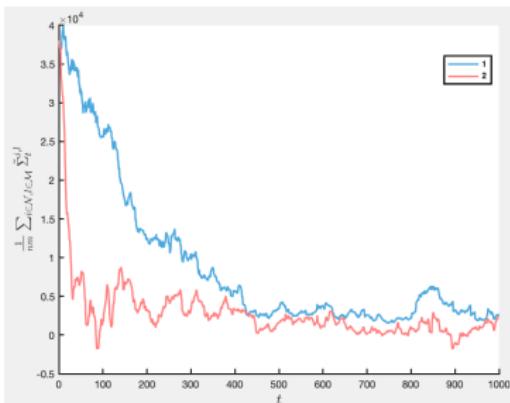


## Алгоритм с ускорением для отслеживания целей

$$\begin{cases} \tilde{x}_{2n-2} = \frac{1}{\gamma_{n-1} + \alpha_n(\mu - \eta - 1)} \left( \alpha_n \gamma_{n-1} z_{2n-2} + \gamma_n \hat{\theta}_{2n-2} \right), \\ x_{2n} = \tilde{x}_{2n-2} + \beta \Delta_n, \quad x_{2n-1} = \tilde{x}_{2n-2} - \beta \Delta_n, \\ \tilde{x}_{2n-1} = \tilde{x}_{2n-2}, \quad \hat{\theta}_{2n-1} = \hat{\theta}_{2n-2}, \\ g_{2n} = \Delta_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{2\beta}, \\ \hat{\theta}_{2n} = \tilde{x}_{2n-1} - hg_{2n}, \\ z_{2n} = \gamma_n^{-1} \left[ (1 - \alpha_n) \gamma_{n-1} z_{2n-2} + \alpha_n (\mu - \eta - 1) \tilde{x}_{2n-1} - \alpha_n g_{2n} \right]. \end{cases}$$

где  $\alpha_n, \beta, h, \eta, \mu$  — параметры,  $x_t^i$  — точки наблюдений,  $\Delta_n$  — рандомизированное Бернуlliевское пробное возмущение с независимыми компонентами, равными  $\pm \frac{1}{\sqrt{d}}$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$ .

# Результаты моделирования



Типичное поведение дисперсии ошибки: (1) для TAC2015; (2) для алгоритма с ускорением ACC2022.

Параметры моделирования: 3 сенсора, 6 движущихся целей; у каждого сенсора не более двух активных каналов для обмена информацией; на каждом такте сенсор случайно выбирает одну цель и измеряет расстояние до нее; динамика целей

$$r_t^I = r_{t-1}^I + \zeta_t^I, I \in \mathcal{M}.$$

# Консенсус в сетях

- Амелина Н.О., Фрадков А.Л. Приближенный консенсус в стохастической динамической сети с неполной информацией и задержками в измерениях // Автомат. и телемех., 2012, № 11, 6–29
- Amelina, N., Fradkov, A., Jiang, Y., & Vergados, D. J. (2015). Approximate consensus in stochastic networks with application to load balancing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 61(4), 1739–1752
- Vergados, D.J., Amelina, N., Jiang, Y., Kralevska, K., & Granichin, O. (2018). Toward optimal distributed node scheduling in a multihop wireless network through local voting. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 17(1), 400–414

## Балансировка загрузки сети

Пусть  $x_t^i = q_t^i / p_t^i$ ,  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  — загрузки узлов сети, где

- $q_t^i$  — очередь заданий агента  $i$  в момент времени  $t$
- $p_t^i$  — производительность агента  $i$  в момент времени  $t$

Динамическая модель:

$$q_{t+1}^i = q_t^i - p_t^i + z_t^i + p_t^i u_t^i, \quad t = 0, 1, \dots$$

или

$$x_{t+1}^i = x_t^i - 1 + f_t^i + u_t^i,$$

Оптимальное решение:  $z_t = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i$ ,  $\bar{u}_i = ?$

$$T(u) = \max_{i \in N} time_i(\bar{u}_i) \rightarrow \min_u$$

Согласованность:

$$p_1 \bar{u}_1 = p_2 \bar{u}_2 = \dots = p_n \bar{u}_n$$

Функционал среднего риска (Потенциал Лапласа):

$$F(u) = \sum_{i,j=1}^m a_t^{i,j} (time_t^i - time_t^j)^2 \rightarrow \min_u$$

# Консенсусное управление

Динамика агентов:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i, u_t^i), \quad i \in N = \{1, \dots, n\}$$

Согласованное поведение:

$$x_t^i \approx x_t^j, \quad i, j \in N$$

Наблюдения:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i$$

Протокол локального голосования — градиентный метод для потенциала Лапласа:

$$u_t^i = \gamma \sum_{j \in \bar{N}_t^i} a_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i})$$

# Результаты моделирования

Распределение  $10^6$  заданий по 1000 серверам

Пример топологии сети:

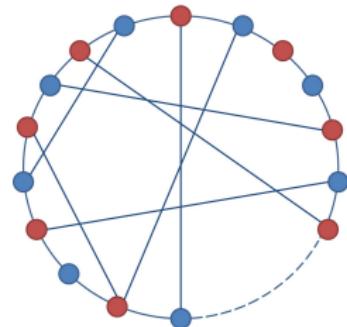
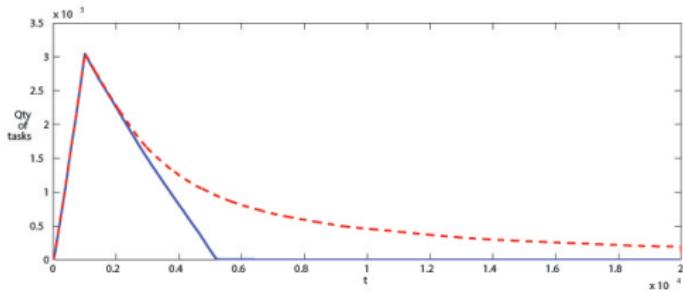


График поведения



# Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation-based Consensus for Tracking under Unknown-but-Bounded Disturbances

Oleg Granichin, *Senior Member, IEEE*, Victoria Erofeeva, Yury Ivanskiy,  
and Yuming Jiang, *Senior Member, IEEE*

**Abstract**—We consider a setup where a distributed set of sensors working cooperatively can estimate an unknown signal of interest, whereas any individual sensor cannot fulfil the task due to lack of necessary information diversity. This paper deals with these kinds of estimation and tracking problems and focuses on a class of simultaneous perturbation stochastic approximation (SPSA)-based consensus algorithms for the cases when the corrupted observations of sensors are transmitted between sensors with communication noise and the communication protocol has to satisfy a prespecified cost constraints on the network topology. Sufficient conditions are introduced to guarantee the stability of estimates obtained in this way, without resorting to commonly used but stringent conventional statistical assumptions about the observation noise such as randomness, independence, and zero mean. We derive an upper bound of the mean-square error of the estimates in the problem of unknown time-varying parameters tracking under unknown-but-bounded observation errors and noisy communication channels. The result is illustrated by a practical application to the multi-sensor multi-target tracking problem.

**Index Terms**—Distributed tracking, multi-agent networks, consensus algorithm, simultaneous perturbation stochastic approximation, SPSA, randomized algorithm, arbitrary noise, unknown-but-bounded disturbances, stochastic stability, tracking performance.

$\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  is the loss function of agent  $i$ , which is typically known only to the agent itself. Studies of consensus and distributed optimization algorithms began from the 1970-80s [4], [5]. Distributed asynchronous stochastic approximation algorithms were studied in [6]. To date, there exist a number of approaches for the case when functions  $F^i(\mathbf{x})$  are convex. In particular, the Alternating Direction Method of Multipliers [7], [8], as well as the subgradient method [9], [10] were proposed. For non-convex tasks, the works [11], [12] develop a large class of distributed algorithms based on various “functional-surrogate units”. The distributed tracking problem is considered when the estimated parameters vary over time.

Recently, for large-scale systems consisting of many individuals (components, targets), a distributed optimization is often used to estimate the unknown parameters which minimize a loss function, based on the information obtained by distributed sensors. So-called *multitarget-multisensor tracking problems* have been widely studied in many practical applications such as adaptive mobile networks, cognitive radio systems, target localization in biological networks, fish schooling, bee swarming, and bird flight (see, e.g., [13], [14]). It is well known that distributed tracking algorithms

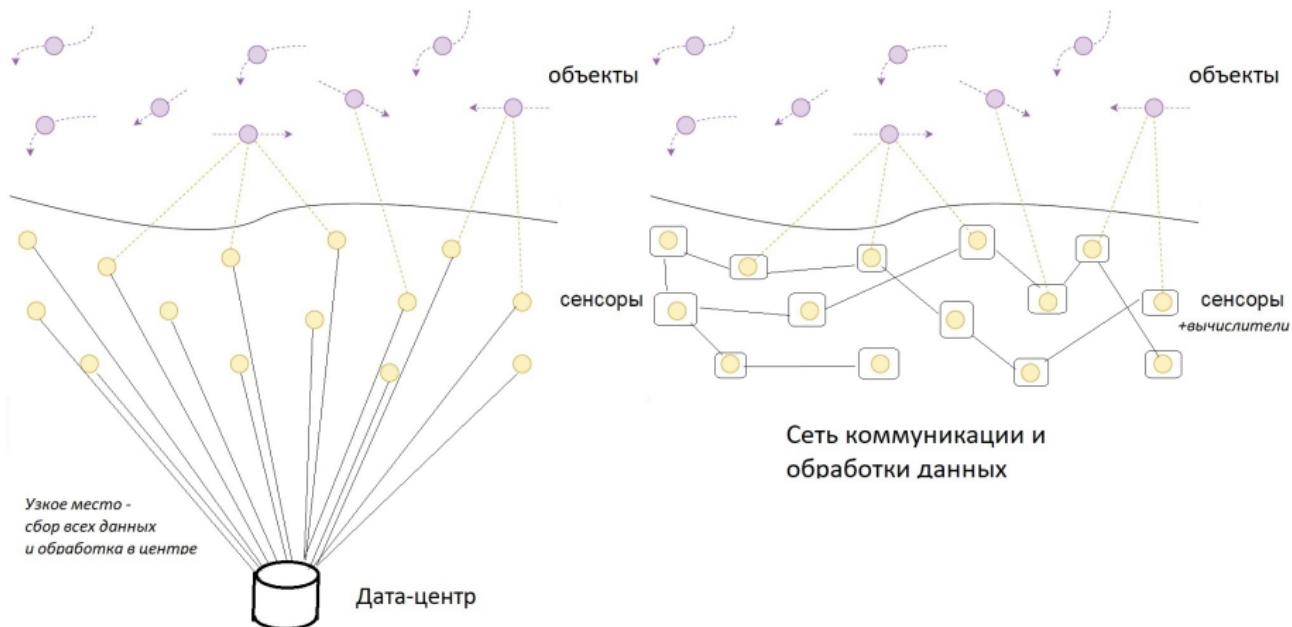
# Распределенная оптимизация

Цель распределенной оптимизации (как правило) — вычислить минимум некоторой целевой функции за счет взаимодействия между агентами

$$\bar{F}(x) = \sum_{i=1}^n F^i(x)$$

где  $x \in \mathbb{R}^d$ , а  $F^i(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — целевая функция агента  $i$ , известная только ему

# Распределенное оценивание положения множества целей



## Топология мультиагентной системы

Взаимодействие внутри системы, состоящей из  $n$  элементов, можно описать с помощью ориентированного графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ , где  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$  — множество вершин, а  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  — множество дуг. Подграф  $\mathcal{G}$  — граф  $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{N}_{\bar{\mathcal{G}}}, \mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}})$ , где  $\mathcal{N}_{\bar{\mathcal{G}}} \subseteq \mathcal{N}$  и  $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}} \subseteq \mathcal{E}$ .

Для узла  $i \in \mathcal{N}$ , множество соседей обозначим

$\mathcal{N}^i = \{j \in \mathcal{N} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . Полустепень захода узла  $i \in \mathcal{N}$  равна  $|\mathcal{N}^i|$ .

Сопоставим дуге  $(j, i) \in \mathcal{E}$  вес  $c^{i,j} > 0$  и положим  $c^{i,j} = 0$  для  $(j, i) \notin \mathcal{E}$ . Обозначим  $C = [c^{i,j}]$  взвешенная матрица смежности или матрица связности.  $\mathcal{G}_C = (\mathcal{N}_C, \mathcal{E}_C)$  — взвешенный ориентированный граф, где  $\mathcal{N}_C \equiv \mathcal{N}$  и  $\mathcal{E}_C \equiv \mathcal{E}$ .

Пусть  $c^{i,j}$  — стоимость передачи данных по дуге  $(j, i) \in \mathcal{E}_C$ .

Взвешенная полустепень захода узла  $i \in \mathcal{N}_C$  равна

$\deg_i^+(C) = \sum_{j=1}^n c^{i,j}$ ,  $\deg_{\max}^+(C)$  — наибольшая полустепень захода среди всех узлов в графе  $\mathcal{G}_C$ .

# Ограничение на топологию

Стоимостные ограничения для узла  $i \in \mathcal{N}$  можно задать в виде верхней границы  $Q$ :  $\deg_i^+(C) \leq Q$ , которая может обозначать общую «стоимость» коммуникации агента  $i$  со своими соседями.

Для удовлетворения ограничений можно генерировать в момент времени  $t$  подграф  $\mathcal{G}_{B_t} \subset \mathcal{G}_C$ , задаваемый взвешенной матрицей смежности  $B_t$  таким образом, чтобы  $\deg_i^+(B_t) \leq Q$ .

Стоимостные ограничения  $\deg_i^+(B_t) \leq Q$  не всегда могут быть удовлетворены для заданных  $B_t = C$  и  $Q$ , например, для  $n = 6$ , полного графа  $\mathcal{G}_C$ ,  $c^{i,j} = 1$ ,  $i \neq j$ ,  $c^{i,i} = 0$ , и  $Q < 5$ .

Одно из возможных решений — использование рандомизированной топологии, когда случайно исключаются  $5 - Q$  дуг. При  $Q = 1$  такая стратегия аналогична схеме, используемой в алгоритмах типа *сплетен* (*gossip algorithms*) [Boyd 2006]

## Определение

Случайный подграф  $\mathcal{G}_{B_t}$  удовлетворяет стоимостным ограничениям с уровнем  $Q$ , если

$$\mathbb{E} \deg_{\max}^+(B_t) \leq Q \tag{6}$$

## PCA + консенсус

Обозначим  $\Xi$  множество,  $\{f_\xi^i(\theta)\}_{\xi \in \Xi}$  семейство дифференцируемых функций:  $\forall i \in \mathcal{N} f_\xi^i(\theta) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Предполагается, что параметр  $\theta$  не может быть измерен непосредственно. Поэтому задается последовательность точек измерения  $x_1^i, x_2^i, \dots, i \in \mathcal{N}$  выбираемых согласно плану наблюдения. Значения  $y_1^i, y_2^i, \dots$  функций  $f_{\xi_t}^i(\cdot)$  получаются в моменты времени  $t = 1, 2, \dots$  с аддитивной внешней неизвестной ограниченной помехой  $v_t^i$

$$y_t^i = f_{\xi_t}^i(x_t^i) + v_t^i, \quad (7)$$

где  $\{\xi_t\}$ ,  $\xi_t \in \Xi$  — неконтролируемая (напр.,  $\Xi = \mathbb{N}$  и  $\xi_t = t$ ) или случайная последовательность. В последнем случае предполагается, что существует вероятностное распределение  $\xi_t$ , которое может быть известным или неизвестным

## Постановка задачи

Пусть  $\mathcal{F}_{t-1}$  —  $\sigma$ -алгебра всех случайных событий, произошедших до момента времени  $t$ ,  $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}}$  обозначает условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{t-1}$ . Рассмотрим задачу оптимизации, в которой функция стоимости  $\bar{F}_t(\theta)$  выражается в виде суммы локальных функций  $F_t^i(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}} f_{\xi_t}^i(\theta)$  каждая из которых зависит от общей оптимизационной переменной  $\theta$ . Кроме того, точка минимума  $\theta$  функции  $\bar{F}_t(\theta)$  может меняться со временем.

*Оптимизация функционала среднего риска:* оценить меняющуюся со временем точку минимума  $\theta_t$  распределенной функции

$$\bar{F}_t(\theta) = \sum_{i \in \mathcal{N}} F_t^i(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}} \sum_{i \in \mathcal{N}} f_{\xi_t}^i(\theta) \rightarrow \min_{\theta}. \quad (8)$$

# Коммуникация с помехами

Пусть в момент времени  $t$  сенсоры могут общаться с соседями по сети, задаваемой графом  $\mathcal{G}_{B_t} = (\mathcal{N}_{B_t}, \mathcal{E}_{B_t})$ . Соответствующая матрица смежности  $B_t$  удовлетворяет некоторым усредненным стоимостным ограничениям (6) с уровнем  $Q$

Также предполагается, что сенсор  $i$  получает текущее измерение  $\widehat{\theta}_t^i$  с помехой (7) и, если множество  $\mathcal{N}_t^i = \{j \in \mathcal{N}_{B_t} : (j, i) \in \mathcal{E}_{B_t}\}$  не пусто, также получает текущие оценки, передаваемые соседями по зашумленным каналам связи

$$\tilde{\theta}_t^{i,j} = \widehat{\theta}_t^i + w_t^{i,j}, \quad j \in \mathcal{N}_t^i, \quad (9)$$

где  $w_t^{i,j}$  — помеха в канале связи. Если  $j \notin \mathcal{N}_t^i$ , то  $\tilde{\theta}_t^{i,j} = 0$

## Алгоритм

Введем  $\Delta_k^i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $i \in \mathcal{N}$  — последовательность независимых случайных векторов из  $\mathbb{R}^d$ , называемых *одновременным пробным возмущением*, с симметричными функциями распределения  $P_k^i(\cdot)$ ; и множество вектор-функций (ядер)  $\mathcal{K}_k^i(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Выберем начальное приближение  $\hat{\theta}_0^i \in \mathbb{R}^d$ , шаг  $\alpha > 0$ , коэффициент усиления  $\gamma$ , и последовательности неотрицательных чисел  $\{\beta_k^+\}$  и  $\{\beta_k^-\}$  такие, что  $\beta_k = \beta_k^+ + \beta_k^- > 0$ . Рассмотрим алгоритм с двумя измерениями распределенных функций  $f_{\xi_t}^i(\theta)$  для каждого агента  $i \in \mathcal{N}$ , строящий последовательность точек измерения  $\{x_t^i\}$  и оценки  $\{\hat{\theta}_t^i\}$ :

$$\begin{cases} x_{2k}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i + \beta_k^+ \Delta_k^i, \quad x_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i - \beta_k^- \Delta_k^i, \\ \hat{\theta}_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i, \\ \hat{\theta}_{2k}^i = \hat{\theta}_{2k-1}^i - \alpha \left( \frac{y_{2k}^i - y_{2k-1}^i}{\beta_k} \mathcal{K}_k^i(\Delta_k^i) + \right. \\ \left. \gamma \sum_{j \in \mathcal{N}_{2k-1}^i} b_{2k-1}^{i,j} (\tilde{\theta}_{2k-1}^{i,j} - \hat{\theta}_{2k-1}^i) \right) \end{cases} \quad (10)$$

## Алгоритм

Обозначим  $\bar{\theta}_t = \text{col}(\hat{\theta}_t^1, \dots, \hat{\theta}_t^n)$  — обобщенный вектор оценок всех сенсоров в момент времени  $t$  и  $\tilde{\theta}_t = \text{col}(\tilde{\theta}_t^{1,1}, \tilde{\theta}_t^{2,1}, \dots, \tilde{\theta}_t^{n,1}, \tilde{\theta}_t^{1,2}, \dots, \tilde{\theta}_t^{n,n})$  — соответствующий вектор данных, передаваемых по зашумленным каналам связи. Обозначим:  $\bar{y}_t = \text{diag}_n(\text{col}(y_t^1, \dots, y_t^n))$ ,  $\bar{\Delta}_k = \text{col}(\mathcal{K}_k^1(\Delta_k^1), \dots, \mathcal{K}_k^n(\Delta_k^n))$ . Алгоритм (10) можно переписать в новых обозначениях:

$$\bar{\theta}_{2k} = \bar{\theta}_{2k-1} - \alpha \left[ \left( \frac{\bar{y}_{2k} - \bar{y}_{2k-1}}{\beta_k} \otimes I_d \right) \bar{\Delta}_k + \gamma \left( \bar{\mathcal{L}}_{2k-1} \otimes I_d \right) \tilde{\theta}_{2k-1} \right] \quad (11)$$

где  $(n \times n^2)$ -матрица  $\bar{\mathcal{L}}_{2k-1}$  задается таким образом, что ее  $i$ -й ряд состоит из нулей, за исключением элементов с  $(j-1)n+1$  по  $jn$ , совпадающих с  $i$ -м рядом  $\mathcal{L}(B_{2k-1})$ .

# Основной результат

Предположения:

- Градиент  $\nabla f_\xi^i(x)$  удовлетворяет условию Липшица  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$\|\nabla f_\xi^i(x_1) - \nabla f_\xi^i(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$$

- Последовательные разности  $\tilde{v}_k^i = v_{2k}^i - v_{2k-1}^i$  помех наблюдения ограничены  $|\tilde{v}_k^i| \leq c_v < \infty$ , or  $\mathbb{E}(\tilde{v}_k^i)^2 \leq c_v^2$  если посл-ть  $\{\tilde{v}_k^i\}$  случайная
- Помехи в канале связи  $w_t^{i,j}$  случайные, независимые, одинаково распределенные  $\mathbb{E}w_t^{i,j} = 0$ ,  $\mathbb{E}\|w_t^{i,j}\|^2 \leq \sigma_w^2$ . Все случайные векторы и переменные  $w_t^{i,j}$ ,  $b_t^{i,j}$ ,  $\xi_t$ , and  $\xi_{t+1}$  взаимно независимы (если они случайные)

## Теорема

Последовательность оценок  $\{\bar{\theta}_{2k}^i\}$  имеет асимптотически эффективную верхнюю границу  $\bar{L} > 0$  невязки оценок:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} : \forall k > \bar{k} : \sqrt{E\|\bar{\theta}_{2k}^i - 1_n \otimes \theta_{2k}\|^2} \leq \bar{L} + \varepsilon$ .

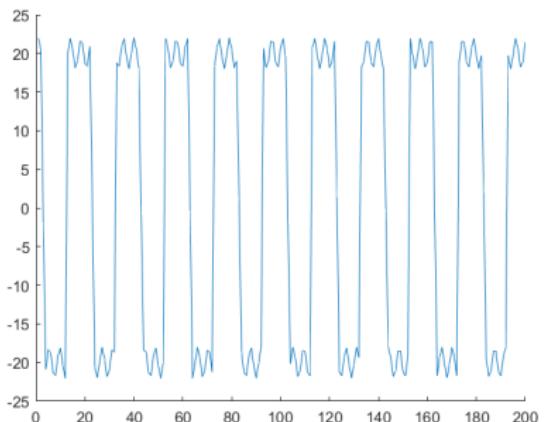
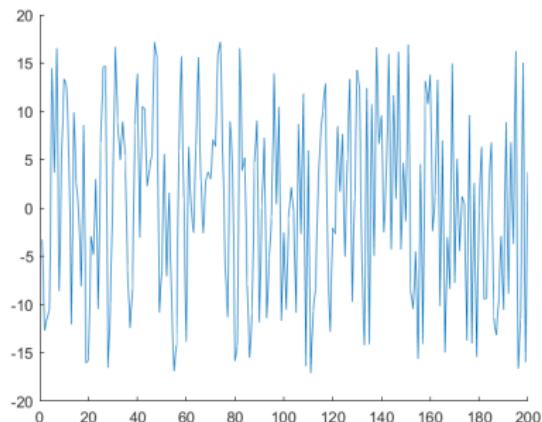
## Распределенный алгоритм с ускорением

$$\begin{cases} \tilde{x}_{2k-2}^i = \frac{1}{\gamma_{k-1}^i + \alpha_k^i(\mu - \eta)} \left( \alpha_k^i \gamma_{k-1}^i z_{2k-2}^i + \gamma_k^i \hat{\theta}_{2k-2}^i \right), \\ x_{2k}^i = \tilde{x}_{2k-2}^i + \beta \Delta_k^i, \quad x_{2k-1}^i = \tilde{x}_{2k-2}^i - \beta \Delta_k^i, \\ \tilde{x}_{2k-1}^i = \tilde{x}_{2k-2}^i, \quad \hat{\theta}_{2k-1}^i = \hat{\theta}_{2k-2}^i, \\ g_{2k}^i = \Delta_k^i \frac{y_{2k}^i - y_{2k-1}^i}{2\beta} + \omega \sum_{j \in \mathcal{N}^i} b^{i,j} (\tilde{x}_{2k-1}^i - \tilde{x}_{2k-1}^{i,j}), \\ \hat{\theta}_{2k}^i = \tilde{x}_{2k-1}^i - h g_{2k}^i, \\ z_{2k}^i = \frac{1}{\gamma_k^i} \left[ (1 - \alpha_k^i) \gamma_{k-1}^i z_{2k-2}^i + \right. \\ \left. \alpha_k^i (\mu - \eta) \tilde{x}_{2k-1}^i - \alpha_k^i g_{2k}^i \right], \end{cases}$$

где  $\alpha_k^i, \beta, \omega, \gamma_k^i, h, \mu, \eta$  – параметры и константы,  $x_t^i$  – точки наблюдения,  $\Delta_k^i$  – пробное возмущение.

# Моделирование: помехи

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0.5$$



$$v_t = (\text{rand}() - 0.5) * \text{rand}() * 40$$

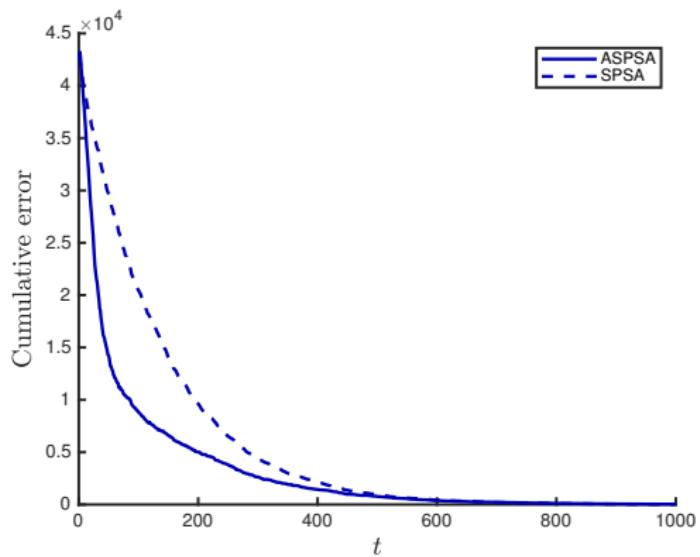
$$v_t = 2 * \sin(t * \text{rand}() * 10) + \\ 20 * \text{sign}(10 - \text{mod}(t + \text{randi}(10), 2*10))$$

# Моделирование

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0.5$$

Позиции сенсоров — о, Позиции целей — ·, Оценки позиций целей — +

# Моделирование



Агрегированная среднеквадратическая ошибка оценивания.  
Пунктирная линия – изначальный алгоритм, сплошная – ускоренная  
версия.

# Рандомизированные алгоритмы РСА и квантовые вычисления

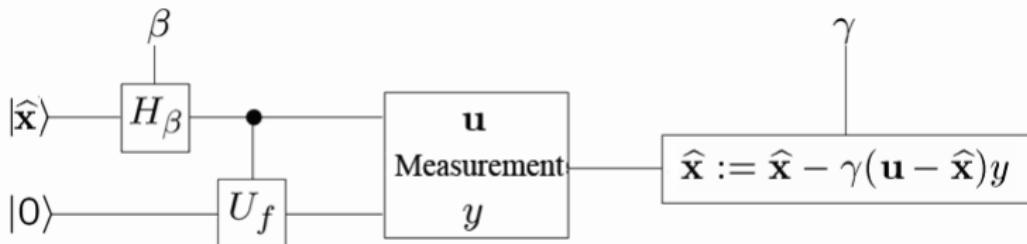
Все известные эффективные квантовые алгоритмы выполняются по следующей схеме:

- сначала подготавливается «суперпозиция» входов
- потом происходит обработка входов и
- измерение результата

# Выполнение алгоритма РСА на квантовом компьютере

$$u = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} \sum_{\Delta_i \in \{-1, +1\}^d} |\hat{x} + \beta \Delta_i\rangle = H_\beta |\hat{x}\rangle$$

$$U_f |u\rangle |0\rangle = \frac{1}{2^d} \sum_{\Delta_i \in \{-1, +1\}^d} |\hat{x} + \beta \Delta_i\rangle |f(\hat{x} + \beta \Delta_i)\rangle$$



Квантовая цепь для вычисления градиента «на лету».

## *Гранты*

2020–2022 — пять грантов от производителя компьютерной техники и смартфонов

2021 — грант от нефтедобывающей компании

2021–2023 — РНФ 21-19-00516 «Мультиагентное адаптивное управление в сетевых динамических системах с применением к группам робототехнических устройств в условиях неопределенностей»

2020–2022 — РФФИ 20-01-00619 «Рандомизированные алгоритмы многоагентной оптимизации, распознавания образов и оценивания в условиях существенных неопределенностей»

Патент «Аэродинамическое крыло летательного аппарата с адаптивно изменяющейся поверхностью» №2660191, зарегистрирован в гос. реестре изобретений РФ 05.07.2018, заявка №2016147133 от 30.11.2016

Свид-во о гос. рег. прог. для ЭВМ №2016612673 от 3.03.2016 «Программный комплекс мультиагентной системы управления распределенными гетерогенными вычислительными ресурсами для адаптивной балансировки загрузки устройств в реальном времени» (MAGS)

Спасибо за внимание!