

Вычисление группы компонент вещественной алгебраической группы

Дмитрий Тимашев

Механико-математический факультет МГУ

Семинар «Группы Ли и теория инвариантов»

Москва, 7 декабря 2022 г.

Алгебраические группы над $\mathbb{R}$

Пусть G — алгебраическая группа, определённая над $\mathbb{R}$.

$G(\mathbb{C})$ — комплексная группа Ли;

$G(\mathbb{R})$ — вещественная группа Ли.

Вещественная структура (комплексное сопряжение)

$$\sigma : G(\mathbb{C}) \rightarrow G(\mathbb{C}), \quad g \mapsto \bar{g}$$

— **антирегулярный** инволютивный автоморфизм группы $G(\mathbb{C})$.

,

$$\text{т. е. } \sigma^* \mathcal{O}_G = \overline{\mathcal{O}_G}.$$

$$G = (G(\mathbb{C}), \sigma), \quad G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{C})^\sigma$$

Пример

$G \subseteq GL_n$ задана уравнениями на g_{ij} с коэффициентами $\in \mathbb{R} \implies$

$$G(\mathbb{C}) = \{\text{решения с } g_{ij} \in \mathbb{C}\}, \quad G(\mathbb{R}) = \{\text{решения с } g_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

$$g = (g_{ij}) \in G(\mathbb{C}) \implies \sigma(g) = (\bar{g}_{ij}) \in G(\mathbb{C}).$$

Группа компонент

Пусть G связна (в топологии Зарисского)

$\implies G(\mathbb{C})$ связна (в классической топологии).

Но $G(\mathbb{R})$ может быть несвязной (в классической топологии).

Пример

$G = GL_n \implies G(\mathbb{R}) = \{\det > 0\} \sqcup \{\det < 0\}$
(две компоненты связности)

$G(\mathbb{R})^\circ :=$ связная компонента единицы в $G(\mathbb{R})$

Задача

Вычислить группу компонент связности $\pi_0 G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^\circ$.

Известные результаты

É. Cartan: G полупроста и односвязна $\implies G(\mathbb{R})$ связна.

H. Matsumoto, 1964: G аффинна (линейна) $\implies \pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\}^n$.

Структура алгебраических групп

Разложение Розенлихта

$$G = G_{\text{aff}} \cdot G_{\text{ant}}, \quad \text{где:}$$

G_{aff} — наибольшая связная аффинная подгруппа, $G_{\text{aff}} \triangleleft G$;

G_{ant} — наибольшая связная **антиаффинная** подгруппа.

,

$$\text{т. е. } \mathcal{O}(G_{\text{ant}}) = \mathbb{C}., \quad G_{\text{aff}} \subseteq Z(G).$$

$G_{\text{aff}} = G_{\text{uni}} \rtimes G_{\text{red}}$ (разложение Леви),

$G_{\text{red}} = G_{\text{ss}} \rtimes S$ (**почти прямое произведение**),

G_{ss} полупроста, $S = Z(G_{\text{red}})^\circ$ — алгебраический тор.

$$1 \longrightarrow (G_{\text{ant}})_{\text{aff}} = (G_{\text{ant}} \cap G_{\text{aff}})^\circ \longrightarrow G_{\text{ant}} \longrightarrow A \longrightarrow 1,$$

где A — абелево многообразие,

$(G_{\text{ant}})_{\text{aff}} = S_0 \times V$, $S_0 \subseteq S$ — тор, $V \subseteq G_{\text{uni}}$ — векторная группа.

Структура алгебраических групп: вещественные точки

$$Z := S \cdot G_{\text{ant}} \text{ — абелева группа,} \quad G = G_{\text{uni}} \cdot (G_{\text{ss}} \times Z).$$

Лемма

$$G(\mathbb{R}) = G_{\text{uni}}(\mathbb{R}) \cdot (G_{\text{ss}} \times Z)(\mathbb{R})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} G(\mathbb{R}) \ni g &= u \cdot h = \bar{g} = \bar{u} \cdot \bar{h} \\ &\implies u^{-1} \cdot \bar{u} = h \cdot \bar{h}^{-1} =: v \in V, \quad \bar{v} = v^{-1} \\ &\implies u \cdot v^{1/2} \in G_{\text{uni}}(\mathbb{R}), \quad v^{-1/2} \cdot h \in (G_{\text{ss}} \times Z)(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\exp : \mathfrak{g}_{\text{uni}} \xrightarrow{\sim} G_{\text{uni}} \implies G_{\text{uni}}(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{g}_{\text{uni}}(\mathbb{R}) \text{ СВЯЗНО}$$

Следствие

$$\pi_0 G(\mathbb{R}) = \pi_0 (G_{\text{ss}} \times Z)(\mathbb{R})$$

$$\text{Далее считаем } G = G_{\text{ss}} \times Z, \quad Z = Z(G)^\circ.$$

Когомологии Галуа

1-коциклы: $Z^1(\mathbb{R}, G) = \{z \in G(\mathbb{C}) \mid z\bar{z} = 1\}$

Действие скрученными сопряжениями $G(\mathbb{C}) \curvearrowright Z^1(\mathbb{R}, G)$: $z \xrightarrow{g} gz\bar{g}^{-1}$

1-когомологии: $H^1(\mathbb{R}, G) = Z^1(\mathbb{R}, G)/G(\mathbb{C})$
 (множество с отмеченной точкой, **не** группа!)

Точная когомологическая последовательность:

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1 \quad \Longrightarrow$$

$$1 \rightarrow A(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}, A) \rightarrow H^1(\mathbb{R}, B) \rightarrow H^1(\mathbb{R}, C) \\ B(\mathbb{C}) \ni b \mapsto c \mapsto [b^{-1}\bar{b}]$$

Универсальное накрытие

Обозначения: $G = G_{ss} \times Z$, G_{ss} полупроста, $Z = Z(G)^\circ$,
 $G_{sc} =$ односвязное накрытие G_{ss} , $\mathfrak{z} = \text{Lie } Z$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longleftarrow & G = G_{ss} \times Z & \longleftarrow & \tilde{G} = G_{sc} \times \mathfrak{z} & \longleftarrow & \Gamma \longleftarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 1 & \longleftarrow & T_{ss} \times Z & \longleftarrow & T_{sc} \times \mathfrak{z} & \longleftarrow & \Gamma \longleftarrow 1 \\
 & & \uparrow \mathcal{E} & & \uparrow \mathcal{E}_{sc} \times \text{id} = \tilde{\mathcal{E}} & & \\
 0 & \longleftarrow & \mathfrak{t}_{ss} \oplus \mathfrak{z} & \xleftarrow{\sim} & \mathfrak{t}_{sc} \oplus \mathfrak{z} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & i\Lambda & \xleftarrow{\sim} & iQ^\vee & \longleftarrow & 0
 \end{array}$$

Обозначения: $T_{ss} \subset G_{ss}$, $T_{sc} \subset G_{sc}$ — максимальные торы;
 $\mathfrak{t}_{ss} = \text{Lie } T_{ss}$, $\mathfrak{t}_{sc} = \text{Lie } T_{sc}$; $\mathcal{E}(x)$, $\mathcal{E}_{sc}(x) = \exp(2\pi x)$;
 $Q^\vee$ — решётка кореньей.

Точная последовательность

$$\Gamma = \tilde{\mathcal{E}}(i\Lambda) \simeq \Lambda/Q^\vee \simeq \pi_1 G$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{G}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & G(\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}, \Gamma) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, \tilde{G}) \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & G_{\text{sc}}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{z}(\mathbb{R}) & & & & H^1(\mathbb{R}, G_{\text{sc}}) \end{array}$$

связна

$$1 \longrightarrow \pi_0 G(\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, \Gamma) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, G_{\text{sc}})$$

$$[g] \longmapsto [\tilde{\mathcal{E}}(i\lambda)]$$

$$\tilde{G} \ni \tilde{g} \longmapsto g \longmapsto \tilde{g}^{-1} \sigma(\tilde{g}) = \tilde{\mathcal{E}}(i\lambda)$$

Остаётся: вычислить $\text{Ker}[H^1(\mathbb{R}, \Gamma) \rightarrow H^1(\mathbb{R}, G_{\text{sc}})]$.

Основная теорема

Структура решётки периодов:

$$\Lambda_{\mathbb{R}} = \Lambda_{\mathbb{R}}^{\sigma} \oplus \Lambda_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$$

$$\Lambda_{\pm} = \Lambda \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^{\pm\sigma} \subseteq \tilde{\Lambda}_{\pm} = \text{Im}\left(\Lambda \xrightarrow{\text{проекция}} \Lambda_{\mathbb{R}}^{\pm\sigma}\right) \subseteq \frac{1}{2}\Lambda_{\pm}$$

Разложение максимального тора: $T_{ss} = T_c \times T_s$;

$$T_s \text{ *расщепим*: } t = (t_1, \dots, t_m) \in T_s \implies \sigma(t_1, \dots, t_m) = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m),$$

$$T_s(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{\times})^m;$$

$$T_c \text{ *анизотропен*: } t = (t_1, \dots, t_n) \in T_c \implies \sigma(t_1, \dots, t_n) = (\bar{t}_1^{-1}, \dots, \bar{t}_n^{-1}),$$

$$T_c(\mathbb{R}) = (S^1)^n.$$

Подход Сатаке: Выберем T_{ss} так, чтобы T_s был **максимальным** расщепимым тором в G_{ss} .

Теорема

$$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \Lambda_+ / (2\tilde{\Lambda}_+ + Q_+^{\vee})$$

$$[\exp(\pi i \lambda)] = [\mathcal{E}(i \lambda / 2)] \longleftrightarrow [\lambda]$$

Следствия

Теорема

$$\begin{aligned} \pi_0 G(\mathbb{R}) &\simeq \Lambda_+ / (2\tilde{\Lambda}_+ + Q_+^\vee) \\ [\exp(\pi i \lambda)] = [\mathcal{E}(i\lambda/2)] &\longleftrightarrow [\lambda] \end{aligned}$$

Следствие 1

$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\}^n$ — элементарная абелева 2-группа.

Случай редуктивных групп:

$Z = S$ — алгебраический тор, $T = T_{ss} \times S$ — максимальный тор в G ,
 $\Lambda = X^\vee(T)$ — решётка кохарактеров, $\Lambda_+ = X^\vee(T_s)$
 (здесь $T_s \subseteq T$ — максимальный расщепимый тор в G).

Следствие 2 (Н. Matsumoto, 1964)

Все связные компоненты $\pi_0 G(\mathbb{R})$ пересекают $T_s^{(2)} := \{t \in T_s \mid t^2 = 1\}$.

Пример 1: псевдоортогональные группы

$$G = SO_{p,q}, \quad 0 < p \leq q.$$

$$\Lambda = X^\vee = \mathbb{Z}\varepsilon_1^\vee + \cdots + \mathbb{Z}\varepsilon_\ell^\vee, \quad \ell = \lfloor n/2 \rfloor, \quad n = p + q.$$

$$\text{Кокорни: } \pm\varepsilon_i^\vee \pm \varepsilon_j^\vee \ (i \neq j), \quad \pm 2\varepsilon_i^\vee \ (\text{при нечётном } n).$$

$$Q^\vee = \{k_1\varepsilon_1^\vee + \cdots + k_\ell\varepsilon_\ell^\vee \mid k_i \in \mathbb{Z}, \ k_1 + \cdots + k_\ell \text{ чётно}\}.$$

Вещественная структура:

$$\sigma(\varepsilon_i^\vee) = \begin{cases} \varepsilon_i^\vee, & i = 1, \dots, p; \\ -\varepsilon_i^\vee, & i = p + 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Максимальный расщепимый тор:

$$T_s = \{t = \text{diag}(t_1, \dots, t_p, 1, \dots, 1, t_p^{-1}, \dots, t_1^{-1})\}.$$

$$\Lambda_+ = \widetilde{\Lambda}_+ = \mathbb{Z}\varepsilon_1^\vee + \cdots + \mathbb{Z}\varepsilon_p^\vee.$$

$$Q_+^\vee = \{k_1\varepsilon_1^\vee + \cdots + k_p\varepsilon_p^\vee \mid k_i \in \mathbb{Z}, \ k_1 + \cdots + k_p \text{ чётно}\} \supseteq 2\widetilde{\Lambda}_+.$$

Вывод: $\pi_0 SO_{p,q}(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$, представители связных компонент:

$$t_0 = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad t_1 = \exp(\pi i \varepsilon_1^\vee) = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1).$$

Пример 1 (продолжение)

$$G = PSO_{p,q} = SO_{p,q}/\{\pm \text{diag}(1, \dots, 1)\}, \quad n = p + q = 2\ell.$$

$$\Lambda = X^\vee = \{k_1\varepsilon_1^\vee + \dots + k_\ell\varepsilon_\ell^\vee \mid k_i \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}, k_i - k_j \in \mathbb{Z}\}.$$

$$p < q: \quad \Lambda_+ = \mathbb{Z}\varepsilon_1^\vee + \dots + \mathbb{Z}\varepsilon_p^\vee,$$

$$\tilde{\Lambda}_+ = \{k_1\varepsilon_1^\vee + \dots + k_p\varepsilon_p^\vee \mid k_i \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}, k_i - k_j \in \mathbb{Z}\}.$$

$$p \text{ чётно} \implies Q_+^\vee \supseteq 2\tilde{\Lambda}_+ \implies \pi_0 PSO_{p,q}(\mathbb{R}) = \{\pm 1\};$$

$$p \text{ нечётно} \implies Q_+^\vee + 2\tilde{\Lambda}_+ = \Lambda_+ \implies PSO_{p,q}(\mathbb{R}) \text{ связна.}$$

$$p = q = \ell \text{ (расщепимый случай):} \quad \Lambda_+ = \tilde{\Lambda}_+ = \Lambda, \quad Q_+^\vee = Q^\vee.$$

ℓ нечётно

$$\implies Q_+^\vee + 2\tilde{\Lambda}_+ = \mathbb{Z}\varepsilon_1^\vee + \dots + \mathbb{Z}\varepsilon_\ell^\vee \implies \pi_0 PSO_{p,q}(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}.$$

Представители компонент:

$$t_0, \quad t_2 = \exp \pi i(\varepsilon_1^\vee + \dots + \varepsilon_\ell^\vee)/2 = \pm \text{diag}(i, \dots, i, -i, \dots, -i).$$

$$\ell \text{ чётно} \implies Q_+^\vee \supseteq 2\tilde{\Lambda}_+ \implies \pi_0 PSO_{p,q}(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}^2.$$

Представители компонент: $t_0, t_1, t_2, t_3 = t_1 t_2$.

Пример 2: эллиптические кривые

$$G = \mathbb{C}/i\Lambda, \quad \tilde{G} = \text{Lie } G = \mathbb{C}, \quad \mathcal{E} \text{ — факторизация по } i\Lambda.$$

$$\text{Здесь } Q^\vee = 0, \quad \pi_0 G(\mathbb{R}) = \Lambda_+ / 2\tilde{\Lambda}_+.$$

Выбор масштаба на $\mathbb{C} \implies$

$$\text{можно считать } i\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega, \quad -\frac{1}{2} \leq \text{Re } \omega < \frac{1}{2}.$$

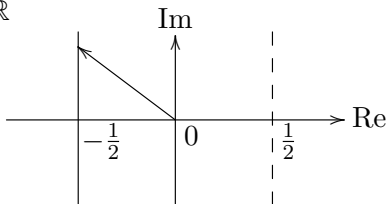
$$\sigma(\Lambda) = \Lambda \iff \omega \in i\mathbb{R} \text{ или } \omega \in -\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$$

Случай 1: $\omega \in i\mathbb{R}$

$$i\Lambda_+ = i\tilde{\Lambda}_+ = \mathbb{Z}\omega \implies \pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Случай 2: $\omega \in -\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} i\Lambda_+ &= \mathbb{Z}(\omega - \bar{\omega}) = \mathbb{Z}(2\omega + 1), & i\tilde{\Lambda}_+ &= \mathbb{Z} \cdot \frac{\omega - \bar{\omega}}{2} = \mathbb{Z}(\omega + 1/2) \\ &\implies G(\mathbb{R}) \text{ связна.} \end{aligned}$$



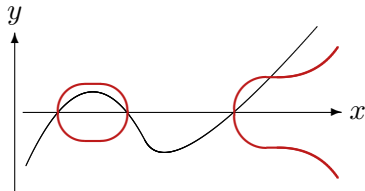
Пример 2 (продолжение)

Нормальная форма Вейерштрасса: $y^2 = f(x) = x^3 + px + q$

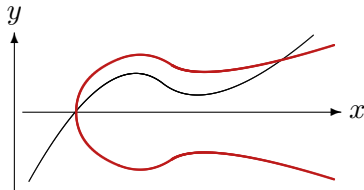
$$p = -15 \sum_{\lambda \in i\Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4}, \quad q = -35 \sum_{\lambda \in i\Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Дискриминант: $D(f) = -4p^3 - 27q^2$.

Случай 1: $\omega \in i\mathbb{R} \implies D(f) > 0$



Случай 2: $\omega \in -\frac{1}{2} + i\mathbb{R} \implies D(f) < 0$



Ссылки



Д. А. Тимашев,

О группе компонент вещественной алгебраической группы,
Труды МИАН **318** (2022), 193–203, [arXiv:2203.14024](#).



M. Borovoi, O. Gabber,

A short proof of Timashev's theorem on the real component group of a real reductive group,
Archiv der Mathematik (2022), [arXiv:2204.11482](#).



M. Brion,

Some structure theorems for algebraic groups,
Proc. Symp. Pure Math. **94** (2017), 53–125, [arXiv:1509.03059](#).

Спасибо за
внимание!