

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 12. Квантовая относительная энтропия

Теретёнков Александр Евгеньевич

6 декабря 2022 г.

В прошлой серии...

Определение. Пусть ρ, σ — матрицы плотности в \mathbb{C}^n

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho \ln \rho - \text{Tr } \rho \ln \sigma, \quad \ker \rho = \ker \sigma = \{0\}$$

В общем случае введём носитель матрицы плотности

$$\text{supp } \rho = \text{sign } \rho \cdot \mathbb{C}^n.$$

$$S(\rho||\sigma) = \begin{cases} \text{Tr } \rho|_{\text{supp } \rho} \ln \rho|_{\text{supp } \rho} - \text{Tr } \rho|_{\text{supp } \rho} \ln \sigma|_{\text{supp } \rho}, & \text{supp } \rho \subseteq \text{supp } \sigma \\ +\infty, & \text{supp } \rho \not\subseteq \text{supp } \sigma \end{cases}$$

Квантовая относительная энтропия

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geq 0, \quad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Квантовая относительная энтропия

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geq 0, \quad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Доказательство: Используя разложение в ряд Тейлора функции $\eta(\lambda) = -\lambda \ln \lambda$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu) + (\lambda - \mu)\eta'(\mu) + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2\eta''(\xi), \quad 0 < \lambda < \xi < \mu \leq 1$$

С учётом $\eta'(\lambda) = -1 - \ln \lambda$, $\eta''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}$, получаем

$$-\lambda \ln \lambda = -\mu \ln \mu - (\lambda - \mu) - (\lambda - \mu) \ln \mu - \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi}$$

Квантовая относительная энтропия

$$\lambda \ln \lambda - \lambda \ln \mu = \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi} \geq \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2$$

(с учётом $\xi < 1$)

В частности, и в пределе $\lambda \rightarrow +0$

$$0 \geq -\mu + \frac{1}{2}\mu^2 \quad \text{при } \mu \in [0,1]$$

$$\rho = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|, \quad \sigma = \sum_k \mu_k |h_k\rangle\langle h_k|$$

$$\begin{aligned} S(\rho||\sigma) &= \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j \ln \lambda_j - \lambda_j \ln \mu_k) \geq \\ &\geq \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k)^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho - \sigma)^2 \end{aligned}$$

Квантовая относительная энтропия

Таким образом, мы доказали, что

$$S(\rho||\sigma) \geq \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho - \sigma)^2, \quad \forall \rho, \sigma$$

Очевидно, $\text{Tr}(\rho - \sigma)^2 \geq 0$, причём, если $\text{Tr}(\rho - \sigma)^2 = 0$, то $\rho = \sigma$. □

Квантовая относительная энтропия

Теорема. (Монотонность относительной энтропии) Если Φ — канал, а ρ, σ — матрицы плотности, то

$$S(\Phi(\rho) || \Phi(\sigma)) \leq S(\rho || \sigma)$$

Квантовая относительная энтропия

Лемма 1.

1

$$S(\rho_1 || \rho_2) = -\text{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} \ln(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) \rho_1^{\frac{1}{2}}$$

2

$$S(\rho_1 || \rho_2) = \int_0^\infty \text{Tr}(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + s \cdot \rho_2)^{-1}(\rho_2 - \rho_1) \frac{ds}{(s+1)^2}$$

Квантовая относительная энтропия

Доказательство:

1) Отметим, что

$$f(X\cdot) = f(X)\cdot,$$

что можно проверить для полиномов.

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} = (\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1^{-1}) = (\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1)^{-1}$$

С учётом $[(\rho_2\cdot), (\cdot\rho_1)^{-1}] = 0$, имеем

$$-\ln(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) = -\ln((\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1)^{-1}) = \cdot(\ln \rho_1) - (\ln \rho_2)\cdot.$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} \ln(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) \rho_1^{\frac{1}{2}} &= \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\cdot(\ln \rho_1) - (\ln \rho_2)\cdot) \rho_1^{\frac{1}{2}} = \\ &= \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_1^{\frac{1}{2}} \ln \rho_1 - \ln \rho_2 \rho_1^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{Tr}(\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_1 \ln \rho_2) = S(\rho_1 || \rho_2) \end{aligned}$$

Квантовая относительная энтропия

2)

$$-\ln w = -(w - 1) + \int_0^\infty \frac{(w - 1)^2}{w + s} \frac{ds}{(s + 1)^2}$$

Поэтому представим энтропию в виде:

$$S(\rho_1 || \rho_2) = -\text{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) \rho_1^{\frac{1}{2}} + \\ + \int_0^\infty \frac{ds}{(s + 1)^2} \text{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) \rho_1^{\frac{1}{2}}$$

Квантовая относительная энтропия

Начнём с первого члена

$$\begin{aligned}(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} &= \rho_2\rho_1^{-\frac{1}{2}} - \rho_1^{\frac{1}{2}} = (\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}} \\ &- \text{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} = \\ &= \text{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}} = \text{Tr}(\rho_2 - \rho_1) = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Квантовая относительная энтропия

С учётом

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI = \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1) \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

подынтегральный член

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) \rho_1^{\frac{1}{2}} &= \\ &= \text{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \text{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \text{Tr} (\rho_2 - \rho_1) (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \quad \square \end{aligned}$$