Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 13. Монотонность квантовой относительной энтропии. Теория ресурсов

Теретёнков Александр Евгеньевич

13 декабря 2022 г.

В прошлой серии...

Теорема.(Монотонность относительной энтропии) Если Φ — канал, а ρ, σ — матрицы плотности, то

$$S(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leqslant S(\rho||\sigma)$$

Квантовая относительная энтропия

Лемма 1.

1. $$S(\rho_1||\rho_2) = -\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}\ln(\rho_2\cdot\rho_1^{-1})\rho_1^{\frac{1}{2}}$$

2. $$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^{\infty}\operatorname{Tr}(\rho_2-\rho_1)(\rho_1\cdot+s\cdot\rho_2)^{-1}(\rho_2-\rho_1)\frac{ds}{(s+1)^2}$$

Доказательство:

1) Отметим, что
$$f(X\cdot) = f(X)\cdot,$$
что можно проверить для полиномов.

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} = (\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1^{-1}) = (\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1)^{-1}$$

С учётом $[(\rho_2\cdot),(\cdot\rho_1)^{-1}] = 0$, имеем

$$-\ln(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) = -\ln((\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1)^{-1}) = \cdot(\ln\rho_1) - (\ln\rho_2)\cdot$$

$$-\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}\ln(\rho_2\cdot\rho_1^{-1})\rho_1^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\cdot(\ln\rho_1) - (\ln\rho_2)\cdot)\rho_1^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_1^{\frac{1}{2}}\ln\rho_1 - \ln\rho_2\rho_1^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{Tr}(\rho_1\ln\rho_1 - \rho_1\ln\rho_2) = S(\rho_1||\rho_2)$$

Квантовая относительная энтропия

2)

$$-\ln w = -(w-1) + \int_0^\infty \frac{(w-1)^2}{w+s}\frac{ds}{(s+1)^2}$$

Поэтому представим энтропию в виде:

$$S(\rho_1||\rho_2) = -\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1}-I)\rho_1^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{ds}{(s+1)^2}\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1}-I)(\rho_2\cdot\rho_1^{-1}+sI)^{-1}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1}-I)\rho_1^{\frac{1}{2}}$$

Квантовая относительная энтропия

Начнём с первого члена

$$(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} = \rho_2 \rho_1^{-\frac{1}{2}} - \rho_1^{\frac{1}{2}} = (\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{Tr}(\rho_2 - \rho_1) = 1 - 1 = 0$$

С учётом

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI = \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1) \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

подынтегральный член

$$\operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) \rho_1^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \quad \square$$

Неравенство Кэдисона

Говорят, что положительное отображение $\Phi^*(I) = I$ удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона (иногда, говорят удовлетворяет неравенству Шварца), если

$$\Phi^*(B^\dagger B) \geqslant \Phi^*(B^\dagger)\Phi^*(B), \qquad \forall B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Упражнение. Доказать, что это утверждение следует из 2-положительности, но строго сильнее положительности (то есть существуют положительные отображения, которые этом неравенству не удовлетворяют.)

Квантовая относительная энтропия

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\operatorname{Tr} A^\dagger(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\operatorname{Tr} A^\dagger(\rho_1 \cdot +s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot +s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Доказательство: Обозначим $B = (\Phi[\rho_1] \cdot +s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A]$, $X = (\rho_1 \cdot +s \cdot \rho_2)^{-\frac{1}{2}} A - (\rho_1 \cdot +s \cdot \rho_2)^{\frac{1}{2}} \Phi^*[B]$ и распишем очевидное равенство $\operatorname{Tr} X^\dagger X \geqslant 0$.

Квантовая относительная энтропия

$$\operatorname{Tr} X^\dagger X = \operatorname{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A - \operatorname{Tr} A^\dagger \Phi^*[B] -$$
$$- \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger] A + \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger](\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)\Phi^*[B] \geqslant 0$$

С учётом

$$\operatorname{Tr} A^\dagger \Phi^*[B] + \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger] A = \operatorname{Tr} \Big((\Phi[A])^\dagger B + B^\dagger \Phi[A] \Big) =$$
$$= 2 \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A]$$

мы получаем

$$\operatorname{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] +$$
$$+ \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] - \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger](\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)\Phi^*[B]$$

Таким образом, осталось показать

$$\mathrm{Tr}\,\Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A] \geqslant \mathrm{Tr}\,\Phi^*[B^\dagger](\rho_1\cdot + s\cdot\rho_2)\Phi^*[B]$$

$$\mathrm{Tr}\,\Phi^*[B^\dagger](\rho_1\cdot + s\cdot\rho_2)\Phi^*[B] =$$
$$= \mathrm{Tr}(\Phi^*[B^\dagger]\rho_1\Phi^*[B] + s\Phi^*[B^\dagger]\Phi^*[B]\rho_2) =$$
$$= \mathrm{Tr}(\Phi^*[B]\Phi^*[B^\dagger]\rho_1 + s\Phi^*[B^\dagger]\Phi^*[B]\rho_2) \leqslant \text{/ Неравенство Кэдисона /}$$
$$\leqslant \mathrm{Tr}(\Phi^*[BB^\dagger]\rho_1 + s\Phi^*[B^\dagger B]\rho_2) =$$
$$= \mathrm{Tr}(BB^\dagger\Phi[\rho_1] + sB^\dagger B\Phi[\rho_2]) = \mathrm{Tr}\,B^\dagger(\Phi[\rho_1]B + sB\Phi[\rho_2]) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,B^\dagger(\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])B = \backslash B = (\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A]\backslash =$$
$$= \mathrm{Tr}\,\Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A] \quad \square$$

Квантовая относительная энтропия

Доказательство (Теоремы): Так как

$$\frac{1}{(s+1)^2} > 0, s \in \mathbb{R}_+$$

то по леммам 1 и 2 (полагая $A = \rho_2 - \rho_1$)

$$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1}(\rho_2 - \rho_1)\frac{ds}{(s+1)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty \mathrm{Tr}(\Phi[\rho_2] - \Phi[\rho_1])(\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1}(\Phi[\rho_2] - \Phi[\rho_1])\frac{ds}{(s+1)^2} =$$

$$= S(\Phi[\rho_1]||\Phi[\rho_2]) \quad \square$$

Квантовая относительная энтропия

Квантовые относительные энтропии Реньи

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = (\alpha - 1)^{-1} \ln\left(\mathrm{Tr}(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\rho\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^\alpha\right)$$

Теорема. $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, Φ — канал

$$S_\alpha(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leqslant S_\alpha(\rho||\sigma)$$

Каталитические температурные операции (Catalytic Thermal Operations)

Задан H_S

1. Свободные (бесплатные, free) состояния:

$$\tau_R^\beta \equiv \frac{1}{Z_R^\beta} e^{-\beta \hat{H}_R}, \qquad Z_R^\beta = \mathrm{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_R})$$

Катализатор:
Дополнительное конечно-мерное квантовое состояние ω_C системы с гамильтонианом $\hat{H}_C$, которое мы обязуемся вернуть в начальное состояние.

Элементы теории ресурсов

2. Свободные (бесплатные, free) операции:
Унитарные операторы U_{SRC} такие, что $[U_{SRC}, \hat{H}_{SRC}] = 0$, где $\hat{H}_{SRC} = \hat{H}_S + \hat{H}_C + \hat{H}_R$.

Элементы теории ресурсов

2. Свободные (бесплатные, free) операции:
Унитарные операторы U_{SRC} такие, что $[U_{SRC}, \hat{H}_{SRC}] = 0$, где $\hat{H}_{SRC} = \hat{H}_S + \hat{H}_C + \hat{H}_R$.
Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Catalytic}}(\rho_S) \equiv \mathrm{Tr}_{RC}\left[U_{SRC}\left(\rho_S \otimes \tau_R^{\beta} \otimes \omega_C\right)U_{SRC}^{\dagger}\right]$$

такие, что

$$\mathrm{Tr}_{R}\left[U_{SRC}\left(\rho_S \otimes \tau_R^{\beta} \otimes \omega_C\right)U_{SRC}^{\dagger}\right] = \rho_S' \otimes \omega_C$$

Элементы теории ресурсов

3. Какими условиями монотонности характеризуется возможность перевести $\rho_S \to \rho'_S$ (то есть существование некоторого $\mathcal{E}_{\mathrm{Catalytic}}(\rho_S) = \rho'_S$)?

Элементы теории ресурсов

3. Какими условиями монотонности характеризуется возможность перевести $\rho_S \to \rho'_S$ (то есть существование некоторого $\mathcal{E}_{\mathrm{Catalytic}}(\rho_S) = \rho'_S$)?

Необходимое условие $\rho_S \to \rho'_S$ посредством каталитических температурных операций

$$S_\alpha(\rho_S || \tau_S^\beta) \geqslant S_\alpha(\rho'_S || \tau_S^\beta)$$

Элементы теории ресурсов

Необходимое и достаточное условие для некогерентных матриц плотности и произвольной конечной точности

$\hat{H}_S$, ρ_S, ρ'_S такие, что $[\rho_S, \hat{H}_S] = [\rho'_S, \hat{H}_S] = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1) $S_\alpha(\rho_S||\tau_S^\beta) \geqslant S_\alpha(\rho'_S||\tau_S^\beta)$, $\forall\alpha \in (-\infty, \infty)$.
2) $\forall\varepsilon > 0 \ \exists$ каталитическая температурная операция $\rho_S \to {\rho'_S}^\varepsilon$, такие что $d(\rho'_S, \rho'^\varepsilon_S) \leqslant \varepsilon$,

где $d(\rho, \sigma)$ — следовое расстояние $d(\rho, \sigma) \equiv \mathrm{Tr}\,|\rho - \sigma|$, $S_\alpha(\rho||\sigma)$ — классические энтропии Реньи в энергетическом базисе, то есть $S_\alpha(\rho||\sigma) = S_\alpha(\mathrm{eig}\,\rho||\,\mathrm{eig}\,\sigma)$ и

$$S_\alpha(p||q) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\ln\left(\sum_i p_i^\alpha q_i^{1-\alpha}\right), & \forall\alpha \geqslant 0 \\ \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\sum_i p_i^\alpha q_i^{1-\alpha}\right), & \forall\alpha < 0 \end{cases}$$

(в предельном смысле, когда не определены).