

Гладкие бинарные операции инвариантные относительно вращений

Н.Е.Барабанов

North Dakota State University, USA

26 декабря 2022

Преобразование Лоренца

Для матрицы $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ найдем общий вид матриц $B > 0$, для которых $B\Lambda B = \Lambda$:

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \quad |v| < 1, \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

В векторном случае $\Lambda = \text{diag}\{1, -I\}$, и

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v^\top \\ \gamma v & (I + \gamma^2 v v^\top)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad |v| < 1, \quad \gamma = (1 - |v|^2)^{-1/2}.$$

Преобразование Лоренца (со скоростью света 1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$$

Сложение скоростей по Эйнштейну

Учитывая, что $(I + \gamma^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^\top)^{1/2} = I + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \mathbf{v} \mathbf{v}^\top$ и переходя к дифференциалам, получим

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma dt + \gamma \mathbf{v}^\top d\mathbf{r}, \\ d\mathbf{r}' &= \gamma \mathbf{v} dt + \left(I + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \mathbf{v} \mathbf{v}^\top\right) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$. Тогда

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u}} \left(\mathbf{v} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{u} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \mathbf{v}^\top \mathbf{u} \right).$$

Это и есть сложение скоростей по Эйнштейну.

Эквивалентная форма:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v} \oplus_E \mathbf{u} = \frac{\left(1 + \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}\right) \mathbf{v} + \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}\right)}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u}}.$$

Обозначим через $\mathbb{B}_p$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса p с центром в начале координат. Операция $\oplus_E$ определена в $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_1$, аналитична, и инвариантна: для всех унитарных матриц U (т.е. $U^\top U = I$) имеем

$$U(a \oplus_E b) = (Ua) \oplus_E (Ub).$$

Группоид $(S, \oplus)$ - это непустое множество с бинарной операцией $\oplus: S \times S \rightarrow S$. Группоид $(S, \oplus)$ называется *гугогроуп*, если выполняются следующие свойства 1 - 5:

1. Существует элемент 0 , для которого $0 \oplus a = a \oplus 0 = a$ при всех $a \in S$.
2. Уравнения $a \oplus x = b$ и $y \oplus a = b$ имеют единственные решения $x, y \in S$ при всех $a, b \in S$.
3. При всех $a, b \in S$ существует автоморфизм $\text{gyr}[a, b]$ в S такой, что при всех $c \in S$ справедливо $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus (\text{gyr}[a, b]c)$.
4. При всех $a, b \in S$ справедливо $(\ominus a) \oplus (\ominus b) = \ominus(a \oplus b)$.
5. При всех $a, b \in S$ справедливо $\text{gyr}[a, b] = \text{gyr}[a, b \oplus a]$.

В дальнейшем будут рассмотрены и другие свойства:

6. Left Cancellation Law (LCL): при всех $a, b \in S$ имеем

$$(\ominus a) \oplus (a \oplus b) = b.$$

7. Gyrocommutative Law: при всех $a, b \in S$ имеем

$$a \oplus b = \text{gyr}[a, b](b \oplus a).$$

Любая gyrogroup удовлетворяет LCL.

Существуют gyrogroups, не являющиеся gyrocommutative gyrogroups.

Теорема 1. Пара $(\mathbb{B}_1, \oplus_E)$ является gyrocommutative gyrogroup, обладающая свойствами 1 - 7. При этом $\text{gyr}[a, b]c = Mc$, и унитарная матрица M имеет вид

$$M = I + C_{aa}aa^\top + C_{ab}ab^\top + C_{ba}ba^\top + C_{bb}bb^\top,$$

и скалярные функции $C_{aa}, C_{ab}, C_{ba}, C_{bb}$ приведены ниже:

$$\begin{aligned}C_{aa} &= -\frac{1}{|a|^2} \frac{(1 - \sqrt{1 - |a|^2})(1 - \sqrt{1 - |b|^2})}{1 + a^\top b + \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}} \\C_{ab} &= \frac{1 + \frac{2a^\top b}{(1 + \sqrt{1 - |a|^2})(1 + \sqrt{1 - |b|^2})}}{1 + a^\top b + \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}} \\C_{ba} &= -\frac{1}{1 + a^\top b + \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}} \\C_{bb} &= -\frac{1}{|b|^2} \frac{(1 - \sqrt{1 - |a|^2})(1 - \sqrt{1 - |b|^2})}{1 + a^\top b + \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Другой пример gyrocommutative gyrogroup: сумма Мёбиуса

$$a \oplus_M b = \frac{(1 + 2a^\top b + |b|^2)a + (1 - |a|^2)b}{1 + 2a^\top b + |a|^2|b|^2}$$

для всех $a, b \in \mathbb{B}_1$.

Предположения

Рассмотрим группоиды в шаре $\mathbb{B}_p$, где $p \in (0, \infty]$. Далее предполагаем выполненными следующие свойства.

A1. Для всех $a, b \in \mathbb{B}_p$ и всех унитарных $n \times n$ -матриц U выполнено

$$(Ua) \oplus (Ub) = U(a \oplus b).$$

A2. Отображение $f: \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_p \rightarrow \mathbb{B}_p$ заданное равенством $f(a, b) = a \oplus b$ дважды непрерывно дифференцируемо.

Введем следующие $n \times n$ -матриц функции:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\partial}{\partial y} [(-x) \oplus y] \big|_{y=x} \\ G(x) &= g(x)^\top g(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что $n \times n$ -матрица $G(x)$ неотрицательно определена для всех $x \in \mathbb{B}$. В силу предположения 1 она удовлетворяет условию

$$G(Ux) = UG(x)U^\top$$

для всех $x \in \mathbb{B}$ и всех унитарных $n \times n$ матриц U .

Представление метрического тензора

Теорема 2. Существуют функции $m_0, m_1: [0, p^2) \rightarrow [0, \infty)$ такие что для всех ненулевых $x \in \mathbb{B}_p$

$$G(x) = m_0(|x|^2) \left[I - \frac{xx^\top}{|x|^2} \right] + m_1(|x|^2) \frac{xx^\top}{|x|^2}. \quad (3)$$

Далее предполагаем выполненными следующие свойства.

A3. Функции m_0, m_1 дифференцируемы, $m_0(s) > 0$, $m_1(s) > 0$ при всех $s \in [0, p^2)$, и $m_0(0) = m_1(0) = 1$.

Примеры

Для суммы Эйнштейна

$$m_0(u) = \frac{1}{1-u}, \quad m_1(u) = \frac{1}{(u-1)^2}.$$

Для суммы Мёбиуса

$$m_0(u) = \frac{1}{(1-u)^2}, \quad m_1(u) = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

Метрический тензор и скалярные функции

Теорема 3. Пусть m_0, m_1 - гладкие функции $[0, p^2) \rightarrow (0, \infty)$ такие что $m_0(0) = m_1(0)$. Тогда существует бинарная операция $\oplus: \mathbb{B}_p \times \mathbb{B}_p \rightarrow \mathbb{B}_p$ с метрическим тензором (??) тогда и только тогда, когда справедливо следующее свойство А3:

$$\int_0^p \sqrt{m_1(s^2)} ds = \infty.$$

В дальнейшем будем предполагать его выполненным.

Умножение на целое число

Было бы естественно обозначить $a \oplus a$ через $2 \otimes a$, $a \oplus (a \oplus a)$ через $3 \otimes a$ и т.д. Поставим задачу: существует ли отображение $\otimes: \mathbb{R} \times \mathbb{B}_p \rightarrow \mathbb{B}_p$ такое что при всех $a \in \mathbb{B}_p$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$(t_1 \otimes a) \oplus (t_2 \otimes a) = (t_1 + t_2) \otimes a,$$

$$t_1 \otimes (t_2 \otimes a) = (t_1 t_2) \otimes a,$$

$$1 \otimes a = a?$$

Теорема 4. Такая операция существует, единственна, и задается формулами: $t \times 0 = 0$, и при $a \neq 0$,

$$t \otimes a = \frac{a}{|a|} h^{-1}(t \ h(|a|)), \quad (4)$$

где биекция $h: (-p, p) \rightarrow (-\infty, \infty)$ определяется формулой

$$h(r) = \int_0^r \sqrt{m_1(s^2)} ds.$$

Таким образом, $\mathbb{B}_p$ с бинарной операцией $\oplus$ и умножением на число $\otimes$ образуют векторное пространство (gyrovector space).

Примеры

Для сумм Эйнштейна и Мёбиуса имеем

$$t \otimes a = a \tanh(t(\tanh(|a|))) \frac{a}{|a|}.$$

Символы Кристоффеля

Метрический тензор $G(x) = \{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ позволяет вычислить символы Кристоффеля Γ_{ij}^k . Для краткости обозначим

$$m_j = m_j(|x|^2), \quad m'_j = \left. \frac{dm_j(u)}{du} \right|_{u=|x|^2}, \quad j = 0, 1.$$

Также используем символы Кронекера $\delta_{ij} = 0$ если $i \neq j$, и $\delta_{ij} = 1$ если $i = j$. Как известно,

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_k} \right).$$

Представление символов Кристоффеля

Теорема 5. Символы Кристоффеля для случая метрического тензора (??) имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}) = \frac{m'_1}{m_1} \frac{x_i x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{m'_0}{m_0} (\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i - \frac{2x_i x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2}) + \\ + \frac{m_1 - m_0 - |\mathbf{x}|^2 m'_0}{|\mathbf{x}|^2 m_1} \left(\delta_{ij} x_k - \frac{x_i x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} \right).$$

Параллельный перенос

Теорема 6. Пусть $x(\cdot)$ - гладкая кривая в $\mathbb{B}_p$, и $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Параллельный перенос вектора X_0 вдоль кривой x задается в виде решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{X} + \frac{m'_1}{m_1} \frac{(x^\top \dot{x})(x^\top X)}{|x|^2} x + \\ + \frac{m'_0}{m_0} \left[(x^\top X) \left(I - \frac{xx^\top}{|x|^2} \right) \dot{x} + (x^\top \dot{x}) \left(I - \frac{xx^\top}{|x|^2} \right) X \right] + \\ + \frac{m_1 - m_0 - |x|^2 m'_0}{|x|^2 m_1} \left[\dot{x}^\top \left(I - \frac{xx^\top}{|x|^2} \right) X \right] x = 0, \quad X(0) = X_0. \end{aligned}$$

Частный случай

Параллельный перенос не зависит от параметризации кривой $x(\cdot)$. В важном частном случае интервала от 0 до a (т.е. когда $x(t) = at$, $0 \leq t \leq 1$) имеем

$$\begin{aligned} X(t) = G(at)^{-1/2} X_0 &= \frac{1}{\sqrt{m_0(|a|^2 t^2)}} \left(I - \frac{aa^T}{|a|^2} \right) X_0 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{m_1(|a|^2 t^2)}} \frac{aa^T}{|a|^2} X_0. \end{aligned}$$

Далее обозначим через $P_{0 \rightarrow a} v$ параллельный перенос вектора v вдоль интервала $\{at : 0 \leq t \leq 1\}$.

Теорема 7. Геодезические являются решениями уравнения

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{m'_0}{m_0} 2(\mathbf{x}^\top \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} + \left[\left(\frac{m'_1}{m_1} - \frac{2m'_0}{m_0} \right) \frac{(\mathbf{x}^\top \dot{\mathbf{x}})^2}{|\mathbf{x}|^2} + \right. \\ \left. + \frac{m_1 - m_0 - |\mathbf{x}|^2 m'_0}{|\mathbf{x}|^2 m_1} \left(|\dot{\mathbf{x}}|^2 - \frac{(\mathbf{x}^\top \dot{\mathbf{x}})^2}{|\mathbf{x}|^2} \right) \right] \mathbf{x} = 0.$$

Экспоненциальное отображение и логарифм

Значение экспоненциального отображения $\exp_a(b)$ вектора b в точке a - это значение $x(1)$ решения $x(\cdot)$ уравнения геодезических с начальными данными $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$. В частности, если $x(0) = 0$ и $x(1) = a \neq 0$, то

$$\dot{x}(0) = \frac{a}{|a|} \int_0^{|a|} \sqrt{m_1(s^2)} ds.$$

Значение $\exp_0(\dot{x}(0))$ равно a . Поэтому определим логарифм в точке 0 от ненулевого вектора $a \in \mathbb{B}$ равным правой части предыдущей формулы:

$$\ln_0 a = \frac{a}{|a|} \int_0^{|a|} \sqrt{m_1(s^2)} ds.$$

Представление бинарных операций

Теорема 8. Для любых ненулевых векторов $a, b \in \mathbb{V}$ имеем

$$a \oplus b = \exp_a \left[P_{0 \rightarrow a}(\ln_0 b) \right] \quad (5)$$

Каждая бинарная операция, удовлетворяющая предположениям A1 - A3, имеет метрический тензор G вида (??). Этот тензор определяет символы Кристоффеля и уравнения параллельного переноса, геодезических, а также экспоненциальное и логарифмическое отображения. Формула (??) позволяет найти $a \oplus b$ для всех $a, b \in \mathbb{B}_p$ только по тензору G .

Расстояние между точками

Расстояние $\text{dist}(a, b)$ между точками $a, b \in \mathbb{B}_p$ - это наименьшая длина кривых, соединяющих точки a и b .

Теорема 9. Для всех $a, b \in \mathbb{B}_p$ верно равенство

$$\text{dist}(a, b) = h(|(\ominus a) \oplus b|).$$

Расстояние - симметричная функция; она удовлетворяет неравенству треугольника: для всех $a, b, c \in \mathbb{B}_p$ справедливо неравенство

$$\text{dist}(a, c) \leq \text{dist}(a, b) + \text{dist}(b, c),$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда точка b лежит на геодезической, соединяющей a и c .

Бинарные операции над числами

Интересно, что для всех $a, b \in \mathbb{B}_p$ справедливо

$$|a \oplus b| \leq |a| \oplus |b|,$$

и равенство достигается тогда и только тогда когда для некоторого неотрицательного числа λ верно $a = \lambda b$ или $b = \lambda a$.

Тензор кривизны: линейные отображения

Обозначим через ∇ ковариантную производную Леви-Чивита, и через $[X, Y]$ - скобку Ли векторных полей X и Y . Обозначим через $T_s\mathbb{B}_p$ - касательное пространство многообразия $\mathbb{B}_p$ в точке s . Определим отображение $R: T_s\mathbb{B}_p \times T_s\mathbb{B}_p \times T_s\mathbb{B}_p \rightarrow T_s\mathbb{B}_p$ формулой

$$R(u, v)w = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

где гладкие поля X, Y, Z таковы, что $X(s) = u, Y(s) = v, Z(s) = w$. Отображение R определено корректно, так как правая часть зависит только от тройки (u, v, w) . Более того, $R(u, v)w$ зависит линейно от u, v , и w .

Компоненты тензора кривизны

Если в стандартном ортонормальном базисе $\{e_i\}$ числа $\{u^i\}$, $\{v^i\}$, $\{w^i\}$ - координаты векторов $u, v, w \in T_s\mathbb{B}_p$, то

$$R(u, v)w = R_{ijk}^q w^i u^j v^k e_q,$$

где числа R_{ijk}^q - компоненты тензора кривизны первого рода. Если $\{g_{ij}\}$ - компоненты метрического тензора, то компоненты тензора кривизны второго рода определяются формулой

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^q g_{lq}.$$

Как известно,

$$R_{ijk}^q = \frac{\partial \Gamma_{ki}^q}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^q}{\partial x^k} + \sum_{r=1}^n \left(\Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^q - \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^q \right).$$

Обозначим через $\langle u, v \rangle = u^i g_{ij} v^j$ скалярное произведение в $T_s \mathbb{B}_p$. Если $u, v \in T_s \mathbb{B}_p$ линейно независимы, и σ - двумерная плоскость содержащая u и v , то число

$$K_\sigma(s) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$$

не зависит от выбора базиса (u, v) в σ и называется секционной кривизной многообразия $\mathbb{B}_p$ в точке s в двумерном направлении σ .

Формула секционной кривизны

Для произвольной точки $x \in \mathbb{B}_p$ введем координаты в $T_x \mathbb{B}_p$ так, что

$$x = (\gamma, 0, 0, \dots, 0)^\top, \quad u = (0, 1, 0, \dots, 0)^\top, \quad v = (\alpha, 0, \beta, \dots, 0)^\top.$$

Обозначим m_i, m'_i, m''_i значения функций в точке $|x|^2$, $i = 0, 1$.

Теорема 10. Справедливо равенство

$$K_\sigma(x) = \frac{A\alpha^2 + B\beta^2}{m_1\alpha^2 + m_0\beta^2},$$

где

$$A = \frac{\gamma^2[(m'_0)^2 m_1 + m_0 m'_0 m'_1 - 2m_0 m_1 m''_0] - 3m_0 m_1 m'_0 + m_0^2 m_1}{m_0^2 m_1},$$

$$B = \frac{m_0 m_1 - (m_0 + \gamma^2 m'_0)^2}{\gamma^2 m_0 m_1}.$$

Условие постоянства кривизны

Теорема 11. Секционная кривизна $K_\sigma(s)$ постоянна (т.е. не зависит от точки $s \in \mathbb{B}_p$ и плоскости σ в $T_s\mathbb{B}_p$) и неположительна тогда и только тогда, когда для некоторого неотрицательного числа C

$$m_1(u) = \frac{([um_0(u)]')^2}{m_0(u)(1 + C um_0(u))} \quad \forall u \in [0, p^2). \quad (6)$$

При выполнении этого тождества кривизна равна $-C$.

Изоморфизм операций

Бинарные операции $\oplus$ в $\mathbb{B}_q$ и $\tilde{\oplus}$ в $\mathbb{B}_p$ называются изоморфными, если существует биекция $\varphi: \mathbb{B}_q \rightarrow \mathbb{B}_p$ такая, что для всех $a, b, x \in \mathbb{B}_q$ и всех унитарных матриц U справедливы равенства

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \tilde{\oplus} \varphi(b), \quad \varphi(Ux) = U\varphi(x).$$

Если биекция φ существует, то она имеет вид

$$\varphi(x) = \pm \tilde{\varphi}(|x|) \frac{x}{|x|},$$

где $\tilde{\varphi}$ - биекция $[0, q) \rightarrow [0, p)$.

Отношение изоморфизма транзитивно. Алгебраические свойства изоморфных операций совпадают.

Критерий изоморфизма операций

Пусть бинарные операции $\tilde{\oplus}$ в $\mathbb{B}_q$ и $\oplus$ в $\mathbb{B}_p$ с $p, q \in (0, \infty]$ генерированы парами функций (m_0, m_1) и $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$, соответственно, и удовлетворяют предположениям А1-А3.

Теорема 12. Операции $\tilde{\oplus}$ и $\oplus$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует возрастающая гладкая биекция $\tilde{\varphi}: [0, q) \rightarrow [0, p)$ такая, что $\tilde{\varphi}'(0) > 0$, и для всех $r \in (0, q)$ справедливы равенства

$$\tilde{m}_0(r^2) = m_0(\tilde{\varphi}(r)^2) \left[\frac{\tilde{\varphi}(r)}{\tilde{\varphi}'(0)r} \right]^2,$$

$$\tilde{m}_1(r^2) = m_1(\tilde{\varphi}(r)^2) \left[\frac{\tilde{\varphi}'(r)}{\tilde{\varphi}'(0)} \right].$$

Операции изоморфные сумме Эйнштейна

Теорема 13. Операция $\oplus$ в $\mathbb{B}_q$ порожденная парой функций (m_0, m_1) удовлетворяющих предположениям А1-А3, изоморфна сумме Эйнштейна тогда и только тогда, когда $\lim_{u \rightarrow q^2} um_0(u) = \infty$ и существует положительное число C такое, что

$$m_1(u) = \frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)(1 + C um_0(u))} \quad \forall u \in [0, q^2).$$

Операции изоморфные евклидовой сумме

Теорема 13. Операция $\oplus$ в $\mathbb{B}_q$ порожденная парой функций (m_0, m_1) удовлетворяющих предположениям А1-А3, изоморфна евклидовой сумме тогда и только тогда, когда $\lim_{u \rightarrow q^2} um_0(u) = \infty$ и

$$m_1(u) = \frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)} \quad \forall u \in [0, q^2).$$

Следствие. Пусть бинарная операция $\oplus$ порождена функциями m_0, m_1 удовлетворяющими предположениям A1-A3 и $\lim_{u \rightarrow q^2} um_0(u) = \infty$.

1. Операция $\oplus$ изоморфна сумме Эйнштейна тогда и только тогда, когда все секционные кривизны равны одному и тому же отрицательному числу.
2. Операция $\oplus$ изоморфна евклидовой сумме тогда и только тогда, когда все секционные кривизны равны нулю.

Примеры

Для суммы Эйнштейна

$$m_0(u) = \frac{1}{1-u}, \quad m_1(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$$

и, при $C = 1$,

$$\frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)(1+Cum_0(u))} = m_1(u).$$

Для суммы Мёбиуса

$$m_0(u) = \frac{1}{(1-u)^2}, \quad m_1(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$$

и, при $C = 4$,

$$\frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)(1+Cum_0(u))} = m_1(u).$$

Примеры, продолжение

Для операции $\oplus_\mu$

$$m_0(u) = 1, \quad m_1(u) = \frac{1}{1 + \mu^2 u}$$

и, с $C = \mu^2$,

$$\frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)(1 + C um_0(u))} = m_1(u).$$

Для операции с

$$m_0(u) = \frac{1}{1 - u}, \quad m_1(u) = \frac{1}{(1 - u)^3}$$

имеем

$$\frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)} = m_1(u),$$

и поэтому операция изоморфна евклидовой сумме.

Кратчайшие и ко-кратчайшие кривые

Кривую, состоящую из точек геодезической, назовем кратчайшей:

$$S(a, b) = \{a \oplus (t \otimes b) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Кривую

$$T(a, b) = \{(t \otimes a) \oplus b : t \in \mathbb{R}\}$$

назовем ко-кратчайшей.

Для случая суммы Эйнштейна, сумма углов треугольника, состоящего из кратчайших, меньше 2π . Через любую точку не на кратчайшей проходит бесконечно много кратчайших, не пересекающих данную.

Сумма углов треугольника, состоящего из ко-кратчайших, равна 2π . Через любую точку не на ко-кратчайшей проходит ровно одна ко-кратчайшая, не пересекающая данную.

Как связаны геометрия кратчайших и геометрия ко-кратчайших?

Теорема 14. Для произвольной операции $\oplus$ с функциями m_0 , m_1 , удовлетворяющими предположениям А1-А3, множество ко-кратчайших совпадает с множеством кратчайших некоторой операции, изоморфной евклидовой сумме, тогда и только тогда, когда операция $\oplus$ изоморфна сумме Эйнштейна или евклидовой сумме.

Доказательство этого утверждения основано на представлении $a \oplus b$ в полярной системе координат.

Полярные координаты

Пусть a и b - ненулевые векторы из $\mathbb{B}_p$. Пусть P - двумерная плоскость, содержащая начало координат и векторы a и b .

Тогда геодезическая $\{\exp_a(t \otimes b) : t \in \mathbb{R}\}$ лежит в P .

Введем полярные координаты (r, φ) в P : радиус r - это евклидово расстояние до начала координат, и φ - это угол с направлением вектора a , измеряемый против часовой стрелки. Тогда каждый вектор из P имеет представление

$$y = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Введем функцию $m_2(u) = um_0(u)$.

Операции в полярных координатах

Теорема 15. Для любых линейно независимых векторов $a, b \in \mathbb{B}_p$ имеем

$$a \oplus b = r \cos \varphi \frac{a}{\|a\|} + r \sin \varphi \frac{b_{\perp}}{\|b_{\perp}\|}, \quad (7)$$

где $b_{\perp} = b - \frac{a^T b}{\|a\|^2} a$, числа r, φ удовлетворяют уравнениям

$$\int_{\|a\|}^r \sqrt{\frac{m_2(s^2)}{m_2(s^2) - m_2(\|a\|^2) \sin^2 \alpha}} \sqrt{m_1(s^2)} ds = \int_0^{\|b\|} \sqrt{m_1(s^2)} ds, \quad (8)$$

$$\varphi = \int_{\|a\|}^r \frac{\sqrt{m_2(\|a\|^2)} \sqrt{m_1(s^2)} \sin \alpha}{\sqrt{m_2(s^2)[m_2(s^2) - m_2(\|a\|^2) \sin^2 \alpha]}} ds, \quad (9)$$

и α - угол между векторами a и b .

Параметрическое множество интегрируемых уравнений

Уравнения $(??)$, $(??)$, оказывается, можно проинтегрировать, если операция изоморфна сумме Эйнштейна, то есть, когда функции m_0 , m_1 связаны соотношением

$$m_1(u) = \frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)(1 + Cm_0(u))},$$

где C - положительное число.

Условие теоремы

Теорема 16. Пусть $\oplus$ - бинарная операция в $\mathbb{B}_p$ с метрическим тензором, определенным функциями m_0, m_1 , и изоморфная сумме Эйнштейна с константой C . Для любых линейно независимых векторов $u, v \in \mathbb{B}_q$ определим

$$a = \|u\|, \quad b = \|v\|, \quad \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{a^\top b}{\|a\| \|b\|} \right)^2},$$

$$b_\perp = b - \frac{a^\top b}{\|a\|^2} a, \quad r = \|a \oplus b\|, \quad m_2(u) = u m_0(u),$$

$$m_r = m_2(r^2), \quad m_a = m_2(a^2), \quad m_b = m_2(b^2).$$

Обозначим через φ такой угол, что

$$a \oplus b = r \cos \varphi \frac{a}{\|a\|} + r \sin \varphi \frac{b_\perp}{\|b_\perp\|}.$$

Заключение теоремы

Тогда

$$\begin{aligned} m_r &= m_a + m_b + Cm_a m_b (2 - \delta^2) + \\ &+ 2\sqrt{(1 - \delta^2)m_a m_b (Cm_a + 1)(Cm_b + 1)}, \\ \varphi &= \operatorname{atan} \left[\frac{\sqrt{C}m_r + \sqrt{(m_r - m_a \delta^2)(Cm_r + 1)}}{\sqrt{m_a \delta^2}} \right] - \\ &- \operatorname{atan} \left[\frac{\sqrt{C}m_a + \sqrt{(m_a - m_a \delta^2)(Cm_a + 1)}}{\sqrt{m_a \delta^2}} \right]. \end{aligned}$$

Свойство LCL

Все операции, образующие gyrogroups, обладают свойством LCL (Left Cancellation Law):

$$\ominus a \oplus (a \oplus b) = b \quad \forall a, b \in \mathbb{B}_p.$$

Теорема 17. Пусть функции m_0, m_1 аналитичны в $[0, \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Тогда операция $\oplus$ изоморфна сумме Эйнштейна тогда и только тогда, когда она обладает свойством LCL.

Следствие. Все гладкие инвариантные gyrogroups в шаре $\mathbb{B}_p$ обладают свойством Gyrocommutative Law:

$$a \oplus b = \text{gyr}[a, b](b \oplus a).$$

Все гладкие инвариантные gyrogroups в шаре изоморфны сумме Эйнштейна.

Для дискретных gyrogroups первое утверждение неверно.

Параллельный перенос геодезических

Пусть $\oplus$ - гладкая инвариантная бинарная операция в $\mathbb{B}_p$.
Любая (невырожденная) геодезическая имеет вид

$$S(a, b) = \{a \oplus (t \otimes b) : t \in \mathbb{R}\},$$

где b - ненулевой вектор. Пусть c - ненулевой вектор.
Является ли геодезической параллельный перенос $S(a, b)$ вектором c ? Другими словами, является ли

$$c \oplus S(a, b) = \{c \oplus (a \oplus (t \otimes b)) : t \in \mathbb{R}\}$$

геодезической при всех $a, b, c \in \mathbb{B}_p$?

Теорема 18. Параллельный перенос геодезической $S(a, b)$ вектором c является геодезической при всех $a, b, c \in \mathbb{B}_p$ тогда и только тогда, когда операция $\oplus$ изоморфна сумме Эйнштейна.

Эквивалентные свойства

Предположим, что $\oplus$ - гладкая инвариантная бинарная операция в шаре $\mathbb{B}_p$.

Теорема 19. Следующие условия эквивалентны.

1. Операция $\oplus$ изоморфна сумме Эйнштейна.
2. Метрический тензор операции $\oplus$ имеет функции m_0, m_1 , удовлетворяющие при некотором положительном числе C тождеству $m_1(u) = \frac{[(um_0(u))']^2}{m_0(u)(1+Cum_0(u))}$.
3. Секционная кривизна риманова многообразия, порожденного операцией $\oplus$, постоянна и отрицательна.
4. Операция $\oplus$ удовлетворяет свойству LCL: $\ominus a \oplus (a \oplus b) = b$ для всех $a, b \in \mathbb{B}_p$.
5. При всех $a, b \in \mathbb{B}_p$ существует автоморфизм $\text{gyr}[a, b]: \mathbb{B}_p \rightarrow \mathbb{B}_p$ такой, что $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus (\text{gyr}[a, b]c)$.
6. В римановом пространстве, порожденном операцией $\oplus$, каждый параллельный перенос каждой геодезической является геодезической.

Возможные направления дальнейших исследований.

1. Интегрирование и дифференцирование в пространствах, порождаемых гладкими бинарными операциями.

Вариационное исчисление и решение оптимизационных задач.

2. Распространение теории на бинарные операции над прямоугольными матрицами: параметризация метрического тензора, вывод уравнений для параллельного переноса и для геодезических, определение умножения на число, метрики, вывод представления операций в виде композиции экспоненциального, логарифмического отображений и параллельного переноса, исследование кратчайших, ко-кратчайших, кривизн, условий существования операторов $\text{gug}[a, b]$, применение к квантовой теории.