О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона-Якоби и космологических решениях

В. В. Веденяпин[1]

[1]ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,

Миусская пл., д.4, Москва, 125047 Россия

[1]e-mail: vicveden@yahoo.com

В классических работах уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна из классического, но более общего принципа наименьшего действия. На основе этого предлагается доказательство, что ускоренное расширение Хаббла Вселенной можно получить без лямбда члена.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова-Эйнштейна, уравнение Власова-Максвелла, уравнение Власова-Пуассона.

On the derivation of the equations of electrodynamics and gravitation from the principle of least action and accelerating expanding of Universe

V.V. Vedenyapin

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,

Moscow,125047 Russia

In classical texts equations for fields are proposed without derivation of the right-hand sides. Here we suggest the derivation of the right-hand sides of the Maxwell and Einstein equations in the framework of Vlasov-Maxwell-Einstein equations from the classical, but slightly more general principle of least action. We get accelerating expansion o Universe without Einstein Lambda.

Keywords: Vlasov equation, Vlasov-Einstein equation, Vlasov-Maxwell equation, Vlasov-Poisson equation.

В классических работах (см. [1-4]), уравнения для полей даются без вывода правых частей. Здесь мы предлагаем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия.

1.**Действие в общей теории относительности и уравнения для полей**. Пусть$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e)$функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям

$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$ и заряду$e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$равно $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$.Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned} S = -c\int m f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\, d^3x d^3v dm de dt - \\ -\frac{1}{c}\int e f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)A_{\mu}u^{\mu}\, d^3x d^3v dm de dt + \\ +k_1\int\left(R+\Lambda\right)\sqrt{-g}\, d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x \end{aligned} \qquad (1)$$

где c – скорость света, $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ $(i = 1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i $(i = 1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t) = \partial A_\mu(\boldsymbol{x},t)/\partial x^\nu - \partial A_\nu(\boldsymbol{x},t)/\partial x^\mu$ – электромагнитные поля, R– полная кривизна, Λ– лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -c^3/16\pi\gamma$и $k_2 = -1/16\pi c$– константы [1-4], g –определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ –постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова-Максвелла и Власова-Эйнштейна использовался в работах [5-11]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{aligned} k_1\left(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \qquad (2) \\ = \int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3v dm de - \frac{1}{2}k_2 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком видев работах [9-11] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова-Эйнштейна [5-15]. Если использовалась функция распределения от 4-хмерного импульса, что приводило к необходимости использовать дельта функцию $\delta\left((mc)^2 - g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu\right)$, что неудобно, а уравнения движения, приводящие к уравнению типа Власова, также оказывались неудовлетворительными.

Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется уравнением Максвелла:

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{c^2}\int e\, u^\mu f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d^3v dm de \qquad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более является общим, чем в [1-4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ-функции для одной частицы:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e,t)=\delta\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t)\big)\delta\big(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'(t)\big)\delta(m-m')\delta(e-e') \qquad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1-4] выражения для всех слагаемых:

$$S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)u^{\mu}u^{\nu}}\,dt-\frac{e}{c}\int A_{\mu}\,(\boldsymbol{x},t)u^{\mu}dt$$

$$+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x+k_2\int\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big)\sqrt{-g}d^4x \qquad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1-4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

2.**Уравнения движения частиц в заданных полях, уравнение Лиувилля и уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна**. Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (5),относительно замены$t=\phi(\lambda)$, где λ– произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна[1-4]. Перепишем первые два слагаемых из действия (5):

$$S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}w^{\mu}w^{\nu}}d\lambda-\frac{e}{c}\int A_{\mu}w^{\mu}d\lambda. \qquad (6)$$

Варьируя по $\boldsymbol{x}(\lambda)$иучитывая, что $w^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$, получаем уравнение Эйлера - Лагранжа:

$$cm\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{\mu\nu}w^{\nu}}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta}w^{\alpha}w^{\beta}}}+\frac{e}{c}A_{\mu}\right]=cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta}w^{\alpha}w^{\beta}}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}w^{\alpha}w^{\beta}+\frac{e}{c}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}w^{\nu} \qquad (7)$$

Учитывая, что величина $I=g_{\eta\xi}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial\lambda}\frac{\partial x^{\xi}}{\partial\lambda}$ является интегралом движения по λ для уравнения (7),(обоснование этого см. в [9,10]) приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2}+\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}\frac{dx^{\eta}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=\frac{e}{mc^2}\sqrt{I}F^{\mu}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}, \qquad (8)$$

где$\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}$– символ Кристоффеля:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}=\frac{1}{2}g^{\mu\varsigma}\left(\frac{\partial g_{\varsigma\eta}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\varsigma\nu}}{\partial x^{\eta}}-\frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^{\varsigma}}\right).$$

Уравнение (8) отличается от приведенных в руководствах [1-4] наличием $\sqrt{I}$ в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени $ds=d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (8), которая обладает симметрией при замене $\boldsymbol{x} \to \alpha\boldsymbol{x}$, $\lambda \to \alpha\lambda$, что позволяет понизить её порядок. Для этого перепишем уравнение (8) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = w^\mu \\ \frac{dw^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\nu\eta} w^\nu w^\eta + \frac{e\sqrt{I}}{mc^2} F^\mu_\nu w^\nu \end{cases} \tag{9}$$

Избавляемся от λ, поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (9). Так как $x^0 = ct$ пропорционально времени, обозначим

$$\frac{w^\mu}{w^0} = \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{u^\mu}{c}.$$

При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения на

$$\frac{du^0}{dx^0}$$

и написать уравнения на трёхмерные переменные $x^i, v^i (i = 1,2,3)$. Здесь по-прежнему **u**=(c,**v**). Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s. Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к времени t необходимо, так как наша цель получить замкнутую систему уравнений для полей и частиц, а значит, получить уравнение на функцию распределения $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e)$, которая была в уранениях для полей. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = G^i \end{cases} \tag{10}$$

где через G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma^i_{\nu\eta} u^\nu u^\eta + \frac{v^i}{c} \Gamma^0_{\eta\nu} u^\eta u^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2} \left[F^i_\nu u^\eta - \frac{v^i}{c} \Gamma^0_\eta u^\eta \right],$$

а $J = g_{\nu\xi} u^\nu u^\xi$, $u^0 = c$, $u^i = v^i$ (i=1,2,3).

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия в форме Вейнберга-Фока.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля (его также называют уравнением переноса или уравнением неразрывности) для функции распределения $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e, t)$для системы (10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial (G^i f)}{\partial v^i} = 0 \tag{11}$$

Уравнения (11), (2) и (3) образуют систему уравнений для гравитации и электродинамики Власова-Максвелла-Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистких электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они 1) позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова-Максвелла) и гравитации (уравнение Власова-Эйнштейна) и 2) вывести их из принципа наименьшего действия.

Когда получена правая часть уравнений Эйнштейна, можно проанализировать известные решения уравнений Эйнштейна. Самыми известными являются решения Шваршильда и Фридмана. Для анализа решений Шваршильда как поля в заданной покоящейся частицы теперь можно выписать уравнение, подставив в уравнение (2) дельта функцию. Получаем

$$\mathrm{k}_1\left(\mathrm{R}^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{g}^{\mu\nu}(\mathrm{R}+\Lambda)\right)\sqrt{-\mathrm{g}}=$$
$$=\mathrm{m}\frac{\delta(\mathrm{x})}{2\sqrt{\mathrm{g}^{00}\mathrm{c}^2}}\mathrm{c}\delta^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{k}_2\mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\ .$$

$$\mathrm{k}_2\frac{\partial\sqrt{-\mathrm{g}}\mathrm{F}^{\mu\nu}}{\partial\mathrm{x}_\nu}=\frac{1}{\mathrm{c}^2}\mathrm{e}\delta^{\mu0}\delta(\mathrm{x})$$

.

Решение Фридмана будет проанализировано ниже в нерелятивистском случае.

3. **Общий переход к гидродинамике**[6-7]. Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{dt}=v(x)$, $x\in R^n$, $v(x)\in C^1(R^n)$. Перепишем её для $x=(q,p)$, $q\in R^m$, $p\in R^{n-m}$:

$$\frac{dq}{dt}=w(q,p),\quad \frac{dp}{dt}=g(q,p)$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t,q,p)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial(w_i f)}{\partial q_i}+\frac{\partial(g_j f)}{\partial p_j}=0 \qquad (12)$$

Выполним гидродинамическую подстановку$f(t,q,p)=\rho(q,t)\delta(p-Q(q,t))$. Здесь δ это дельта - функция Дирака, сама эта функция есть предел Максвелловского распределения, когда температура стремится к нулю, $\rho(q,t)$ это аналог плотности, а $Q(q,t)$ - аналог макроскопического импульса. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial\rho(q,t)}{\partial t}\delta\big(p-Q(q,t)\big)-\rho(q,t)\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i(q,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(w_i(q,p)f)}{\partial q_i}=\frac{\partial(w_i(q,Q)\rho(q,t))}{\partial q_i}\delta(p-Q(q,t))$$
$$-\rho(q,t)\,w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta\big(p-Q(q,t)\big)}{\partial p_k}\frac{\partial Q_k(q,t)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial(g_j(q,p)f)}{\partial p_j} = \rho(q,t)g_j\big(q,Q(q,t)\big)\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_j}.$$

Собирая множители при дельта-функции и её производных, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho w_i(q,Q))}{\partial q_i} = 0 \\ \rho(q,t)\left(\dfrac{\partial Q_j(q,t)}{\partial t} + w_i(q,Q(q,t))\dfrac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i} - g_j(q,Q(q,t))\right) = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Эта система является точным следствием уравнения Лиувилля (12): можно называть её гидродинамическим следствием уравнения Лиувилля порядка $(m, n-m)$. Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [4], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [6]. Слово "точное" означает, что если $\rho(q,t)$ и $Q(q,t)$ удовлетворяет системе уравнений (13), то функция $f(t,q,p) = \rho(q,t)\delta(p - Q(q,t))$ удовлетворяет уравнению (13). Это также означает, что подстановка Максвелловского распределения дает приближенные следствия, либо какой-то набор частных решений: например, Больцман изучал эти решения для простейшего варианта уравнения (12), уравнения переноса для свободного движения. Второе из уравнений (13) имеет ясный геометрический смысл: оно описывает движение m-мерных поверхностей в n-мерном пространстве в силу исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в Эйлеровых координатах. Получающаяся система квазилинейных уравнений не общая, а в терминологии Куранта и Гильберта называется системой уравнений с одинаковой главной частью. Эта система обладает следующими замечательными свойствами.

1) В случае линейной исходной системы ОДУ решение системы с одинаковой главной частью можно искать в виде $Q_k(t,q) = \lambda_k^a(t)q_a$, линейном по координатам q. Получается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в матричном виде на матрицу $\lambda_k^a(t)$.

2) Для гамильтоновых систем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(q,p)$$

из неё получается уравнение Гамильтона-Якоби двумя шагами. Первый шаг от уравнения Лиувилля к гидродинамическому следствию порядка$\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$, как это было сделано выше. Второй шаг: в случае гамильтоновых систем проходит дальнейшая подстановка в (12) для импульсов $Q_k(t,q)$ в виде градиента функции: $Q_k(t,\mathrm{q}) = \dfrac{\partial W}{\partial q_k}$. В результате получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho(q,t)\nabla_i W(q,Q))}{\partial q_i} = 0 \\ \rho(q,t)\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\partial W(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla W)\right) = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что там, где плотностьρ равна нулю,оба уравнения исчезают. А там, где плотность не равна нулю, функция $\frac{\partial W(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla W) = f(t)$ зависит только времени[17-20]. Замена $W(q,t) = Z(q,t) + g(t)$, где $\frac{dg}{dt} = f(t)$, приводит к уравнению Гамильтона-Якоби: $\frac{\partial Z(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla Z) = 0$ $[17-20]$.

Этот переход от уравнения Лиувилля к уравнению Гамильтона-Якоби имеет длинную историю. Второй шаг –переход от гидродинамических уравнений к уравнениям типа Гамильтона-Якоби в частном случае гамильтониана $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$возник в работах Маделунга по квантовой механике [16]. А в общем случае гамильтоновых систем такой переход изучался в работах И.С.Аржаных, К.С.Долматова, В.В.Козлова[17-20]. Первый шаг, связавший гидродинамические системы с уравнением Лиувилля и уравнениями Гамильтона-Якоби, был проведен в работах [21-26] после того, как на одной из своих лекций В.В.Козлов вывел уравнения Гамильтона-Якоби из второго из уравнений (13) в гамильтоновом случае. В.В.Козлов назвал эти нижние уравнения (13) уравнениями Лэмба [17-20]. Автор предположил, что эти уравнения Лэмба получаются из уравнений Лиувилля гидродинамической подстановкой, и это предположение подтвердилось [21-26]. Все это мы применим в дальнейшем в релятивистском и нерелятивистском случае.

4. **Переход к гидродинамике и уравнению Гамильтона-Якоби в релятивистском случае уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна**. Для вывода уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в форме Гамильтона-Якоби нужно вывести его в импульсах (гидродинамическая форма получится и для скоростей, и для импульсов). Для этого вернёмся к исходному действию и перепишем его, но нужно воспользоваться трехмерными импульсами. Для этого действие (6) перепишем через время: когда мы получали уравнение движения частицы в скоростях, то нужно было действовать через внешний параметр λ, чтобы использовать символы Кристофеля. А при получении канонических уравнений движения необходимо обычное время:

$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt.$

Мы получим уравнение движения:

$$-cm\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{i\beta}u^{\beta}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}+\frac{e}{c}A_i\right]=-cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^{\eta}v^{\xi}}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}u^{\mu}u^{\nu}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^i}u^{\mu}$$

Латинскинские индексы i, j, k ...пробегают значения 1, 2, 3, а греческие μ, ν ...пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Мы получаем выражение для импульсов:

$$q_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial u^{\mu}}=-mc\frac{g_{\mu\alpha}u^{\alpha}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}+\frac{e}{c}A_{\mu} \tag{14}$$

Здесь выражение для q_0 получается формальным дифференцированием по $\mathrm{v}_0 = \mathrm{c}$.

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы $p_{\mu}=q_{\mu}-\frac{e}{c}A_{\mu}=-mc\frac{g_{\mu\alpha}u^{\alpha}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}$: формулы связи со скоростями проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона-Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем:

$$p^{\beta}=-mc\frac{u^{\beta}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим β-ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p^{\beta}}{p^{0}}=\frac{u^{\beta}}{c}$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_{\alpha}p_{\beta}g^{\alpha\beta}=(mc)^2$ и его решение относительно p_0

$p_0=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, где $a=g^{00}$, $b=2p_ig^{0i}$, $c=p_ip_jg^{ij}-(mc)^2$

Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений

$$\frac{p^{\beta}}{p^{0}}=\frac{u^{\beta}}{c}$$

в формулу (14) при $\mu=0$ (ср.[1-4]) .

Уравнения для полей останется тем же самым (2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d\boldsymbol{v}dmde=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{q},m,e)dqdmde=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},m,e)d\boldsymbol{p}dmde$. Каждая из трех этих величин это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных.

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=c\int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},q,m,e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}u^\mu u^\nu d^3q dm de-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$$
$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g}=\frac{1}{c^2}\int e\,u^\mu f(t,\boldsymbol{x},q,m,e)d^3q dm de$$

Или

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=c\int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},q,m,e)}{2}\frac{cp^\mu p^\nu}{(q^0)(mc)^2}d^3q dm de-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$$
$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g}=\frac{1}{c^2}\int e\,\frac{cp^\mu}{p^0}f(t,\boldsymbol{x},q,m,e)d^3q dm de$$

Здесь имеется в виду, что скорости в первом уравнении, а импульсы p^μ во втором должны быть выражены через канонические импульсы q_μ.

Уравнение движения для частиц получаем уже в Гамильтоновой форме, где функция Гамильтона $H=-c\frac{\partial L}{\partial u^0}=\ -\mathrm{c}\,q_0$. Эта формула получается из-за того, что Лагранжиан для действия $S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt-\frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt$ есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера $u^\mu\frac{\partial L}{\partial u^\mu}-L=0$. Так как по определению $H=u^i\frac{\partial L}{\partial u^i}-L$, получаем $c\frac{\partial L}{\partial u^0}+H=0$. Здесь имеется в виду суммирование по $i=$ 1,2,3 и по $\mu=$ 0,1,2,3.Отсюда находим выражения для скоростей $u^i=\frac{\partial H}{\partial p^i}=u^i(q)=-c\frac{\partial q_0}{\partial q^i}$

Выписывая через этот гамильтониан по общей схеме пункта 3 уравнение Лиувилля гидродинамической подстановкой $f(t,x,q,m,e)=\rho(x,t,m,e)\delta(q-Q(q,t,m,e))$ получаем гидродинамические уравнения. Подстановкой $Q_\alpha=\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ или $P_\alpha=\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}-\frac{e}{c}A_\alpha$ получаем затем уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}-\frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta}-\frac{e}{c}A_\beta\right)g^{\alpha\beta}=(mc)^2$$

Мы таже должны написать уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(\nabla W)\rho)=0$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона-Якоби-Власова-Максвелла-Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку $f(t,x,q,m,e)=\rho(x,t,m,e)\delta(q-Q(q,t,m,e))$:

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=c\int m\frac{\rho(t,x,m\,,e)}{2}\,\frac{cP^{\mu}P^{\nu}}{(P^0)(mc)^2}dmde-\frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$$
$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}\sqrt{-g}=\frac{1}{c^2}\int e\,\frac{cP^{\mu}}{P^0}\rho(t,\boldsymbol{x},m,e)dmde$$

Здесь макроскопические импульсы P^{μ}и P_{μ} связаныобычными соотношениями $P_{\mu}=g_{\mu\nu}P^{\nu}$. При этом в форме Гамильтона-Якоби нужно учитывать, что $P_{\alpha}=\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha}}-\frac{e}{c}A_{\alpha}$. Мы получили уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным, так и в редукции к уравнениям Гамильтона-Якоби. Рассмотрим примеры специальных релятивистских систем.

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S=-cm\int(\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2}+\frac{U}{\mathrm{c}})dt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt-\frac{\mathrm{c}^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с Гамильтонианом [1-4]

$$H=c\sqrt{(mc)^2+q^2}+U$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S=-c\int m(\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2}+U)\,f(\,x,p,t,m)\,d\boldsymbol{p}dmdx\,d\,t-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2d\boldsymbol{x}dt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей:

$$\Delta U=4\pi\gamma\int mf(t,x,q,m,e)dqdmde-\frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона-Якоби и получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho)=0\\ \frac{\partial W}{\partial t}+c\sqrt{(mc)^2+(\nabla W)^2}+U=0\,,\\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\rho dmde-\frac{c^2\Lambda}{2}\end{cases}$$

где $v_i(q)=\frac{\partial H}{\partial q_i}=\frac{cq_i}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда $\rho=\rho(t,r,m)$, $U=U(t,r)$, $W=W(t,r,m,e)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{cW' \quad x^i}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + U = 0 \\ 3\dfrac{U'}{r} + r\left(\dfrac{U'}{r}\right)' = 4\pi\gamma \displaystyle\int m\rho dmde - \dfrac{c^2\Lambda}{2} \end{cases}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r. Космологическим решениям соответствует случай, когда ρ не зависит от пространственной переменной x:$\rho = \rho(m,t)$. Тогда последнее уравнение дает решение

$$U = -\frac{\beta(t)}{r} + \frac{\alpha(t)}{6}r^2$$

здесь $\alpha(t) = 4\pi\gamma \int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}$.

Из первого уравнения системы – уравнения неразрывности– получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0.$$

Величина $H(m,t)$называется постоянной Хаббла (и обычно полагают, что она не зависит от m). Получаем уравнение на S:

$$3\varphi + r\varphi' = 3H,$$

где $\varphi(r) = \frac{W'c}{r\sqrt{(W')^2+(mc)^2}}$.

Решая уравнение относительно φ, получаем:

$$\varphi = H + \frac{B(m,t)}{r^3}$$

Мы получили систему уравнений типа Гурса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0 \\ \dfrac{W'c}{r\sqrt{(W')^2 + (mc)^2}} = H + \dfrac{B(m,t)}{r^3} \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} - \dfrac{\beta(t)}{r} + \dfrac{\alpha(t)}{6}r^2 = 0 \end{cases}$$

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta} = diag(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1)$$

При этом потенциал вносится в действии под корень

$$S = -cm\int \sqrt{c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 + U}\, dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\boldsymbol{x}dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x,q,t) = c\sqrt{((mc)^2+q^2)(1+\frac{2U}{c^2})}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{((mc)^2+(\nabla W)^2)(1+\frac{2U}{c^2})} = 0 \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int \frac{m\rho(m,x,t)}{\sqrt{c^2-(v(\nabla W))^2+U}} dm - \frac{c^2\Lambda}{2} \end{cases}$$

где $v_i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq_i\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$

Уже из вида уравнений видно, что ускорение в первом примере не знакоопределено, а во втором – положительно из-за положительности корня в уравнении Гамильтона-Якоби. Проверим это. По общим формулам $Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$. Если учтем изотропность космологических решений, т. е. $W = W(t,r,m,e)$, то Q пропорционально координатам, а второе уравнение как раз дает ускорение, если учесть, что скорости и импульсы с верхними и нижними индексами имеют разные знаки. Это, конечно, обобщается м на случай, если метрика имеет диагональный изотропный вид (метрика Фридмана - Леметра-Робертсона - Уокера, FLRW-метрика) . Итак, для некоторого класса метрик, мы получили ускоренное расширения вне зависимости от Лямбда члена, и даже вне зависимости от того, какое уравнение определяет поля: все определяется свойствами движений релятивистских частиц.

В следующем пункте мы применим эту технологию в нерелятивистском случае.

5. **Нерелятивистская кинетика и гидродинамика: эволюция Вселенной.** Применим этот способ в нерелятивистском случае для вывода уравнений Власова-Пуассона и, как следствие, уравнений гравитационной газодинамики заряженных частиц, действуя по той же схеме. Нерелятивистский случай соответствует действию [5-7]:

$$S = \int \left[\frac{mv^2}{2} - e\varphi - mU\right] f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v} dm de dt +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\varphi)^2 d\boldsymbol{x} dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 d\boldsymbol{x} dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int U dx dt \qquad (13)$$

Варьируя по φ и по U,получаем дважды уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi \int ef(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e) d\boldsymbol{v} dm de$$

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int mf(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e) d\boldsymbol{v} dm de - \frac{1}{2}c^2\Lambda \qquad (14)$$

Действие для одной частицы следует при выборе $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e) = \delta(e-q)\delta(m-M)\delta\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}(t)\big)\delta\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}'(t)\right)$. Здесь M, q, y(t) это масса, заряд и координата одной частицы. Рассмотрим для такой функции распределения первое слагаемое в (12), получим стандартное действие:

$$S_1 = \int\left[\frac{M(y')^2}{2} - q\varphi(\boldsymbol{y},t) - MU(\boldsymbol{y},t)\right]dt$$

Варьируя, как обычно, в механике, получаем уравнение Ньютона:

$$M\boldsymbol{y}'' + M\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{y}} + q\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{y}} = 0$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений(возвращаемся к (e,m) для заряда и массы и к x вместо y для координаты):

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}\\ \dot{\boldsymbol{v}} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{x}} - \dfrac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{x}}\end{cases}$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v},\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0 \qquad (15)$$

Система (14) - (15) и есть система уравнений Власова-Пуассона-Пуассона с лямбда-членом [38].

Получим точное гидродинамическое следствие этой системы, предполагая гидродинамический вид функции распределения [4-11]: $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},e,m) = \rho(t,\boldsymbol{x},e,m)\delta\big(v - w(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},e,m)\big)$. Слово "точное" означает, что если мы возьмем вместо этого распределения максвелловское, то получим приближенное следствие. Тогда:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\boldsymbol{w}) = 0\\ \dfrac{\partial w_k}{\partial t} + w_i\dfrac{\partial w_k}{\partial x_i} + \dfrac{\partial U}{\partial x_k} + \dfrac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0\\ \Delta\varphi = -4\pi\int e\rho dmde\\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \dfrac{1}{2}c^2\Lambda\end{cases} \qquad (16)$$

Такую систему можно назвать системой Власова-Лэмба-Пуассона-Пуассона. Пусть скорость имеет вид градиента некоторой функции W: $w_k(t,\boldsymbol{x},e,m) = \frac{\partial W(t,\boldsymbol{x},e,m)}{\partial x^k}$.

Тогда получаем систему, которая является также точным следствием уравнения Власова-Пуассона–Пуассона (14-15), где появляется уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\Delta W + \dfrac{\partial \rho}{\partial x^k}\dfrac{\partial W}{\partial x^k} = 0\\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x^i}\right)^2 + U + \dfrac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\varphi = 0\\ \Delta\varphi = -4\pi\int e\rho dmde\\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \dfrac{c^2\Lambda}{2}\end{cases} \qquad (17)$$

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда функции $\rho = \rho(t,r,e,m), W = W(t,r,e,m)$, $U = U(r,t)$, $\varphi = \varphi(r,t)$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{3W'}{r} + r\left(\frac{W'}{r}\right)'\right) + \rho' W' = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}(W')^2 + U + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\varphi = 0 \\ \frac{3\varphi'}{r} + r\left(\frac{\varphi'}{r}\right)' = -4\pi \int e\rho dmde \\ \frac{3U'}{r} + r\left(\frac{U'}{r}\right)' = 4\pi\gamma \int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2} \end{cases}$$

Мы не будем исследовать и решать эту систему: это сделано в другом месте[32,38].

Заключение.

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5-15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов(электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Представляет значительный интерес исследовать различные классы решений полученных уравнений, как это делалось в [27-31]. Особый интерес должно представлять асимптотическое поведение решений уравнений Власова, и тут могла бы помочь его аналогия с уравнением Лиувилля [30-32]. Мы показали также, что полученные уравнения типа Власова должны быть применены к объяснению эволюции Вселенной, так как именно из уравнения Власова-Пуассона следуют нерелятивистские аналоги решений Фридмана, решения Милна-МакКри [33,34]. При этом они являются точным следствием уравнения Власова-Пуассона, поэтому получаются без эвристических предположений работ [33,34] и обосновывают и обобщают их. Эти решения позволили выяснить роль Лямбда-члена, его эквивалентность потенциалу Гурзадяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ и эквивалентность этого любой однородной субстанции, связанной с решением уравнения Пуассона $\Delta u = const$. Мы получили убедительное объяснение ускоренного расширения Вселенной без этих дополнительных предположений. Это оказалось релятивистским эффектом, и оказывается триумфом ОТО, не требуя не лямбда члена, ни темной энергии для объяснения. Результаты работы следуют и развивают [42,43].

Список литературы

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.

3.Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 стр.

4.Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука. 1986.

5.Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. - 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.

6.Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер.матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.

7.Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.

8.Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations (Elsevier Insights, 2011).

9.ВеденяпинВ.В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // ПрепринтыИПМим. М.В.Келдыша. 2018. № 188. 20 с.

10.Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D, 2020. V. 29. № 1.23 p.

11.Vedenyapin, V., Fimin, N., Chechetkin, V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 с.

12.Cercigniani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.

13.Choquet–Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.

14. Rein G., Rendall A.D. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data, Commun. Math.Phys. 150, 561-583, (1992).

15.Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.

16.Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form), Z Phys, 40 (1926), 322–326.

17.Аржаных И.С., Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.;англ.пер.: Arzhanykh I.S., Momentum fields, Nat. Lending Lib., Boston Spa, Yorkshire, 1971, 222 pp.
18.Долматов К. И., Поле импульсов аналитической динамики, Дисс. … канд. физ.-матем. наук, Ташкент, 1950, 84 с.
19.Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 1983, № 6, 10–22; англ. пер.: Kozlov V. V. The hydrodynamics of Hamiltonian systems// Moscow Univ. Mech. Bull., 38:6 (1983), 9–23.
20.Козлов В. В., Общая теория вихрей, Изд-воУдмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239с.
21. Козлов В. В, Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995, 429 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics, Ergeb. Math.Grenzgeb. (3), 31, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+378 pp.
22. Веденяпин В.В., Аджиев С.З., Казанцева В.В. Энтропия по Больцмана и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации // СМФН. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59.
23. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем. Нелинейная динам., 11:2 (2015), 279–286.
24. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка. Докл. РАН, 461:2 (2015), 136–139; англ. пер.: VedenyapinV. V., Fimin N. N. The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution. Dokl. Math., 91:2 (2015), 154–157.
25. Веденяпин В. В., Негматов М. А., О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. РАН, 449:5 (2013), 521–526; англ. пер.: Vedenyapin V. V., Negmatov M. A. On the topology of steady-state solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method. Dokl.Math., 87:2 (2013), 240–244.
26. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби. Докл. РАН, 446:2 (2012), 142–144; англ. пер.: Vedenyapin V. V., Fimin N. N. The Liouville equation, the hydrodynamic substitution, and the Hamilton-Jacobi equation. Dokl. Math., 86:2 (2012), 697–699.
27.Веденяпин В. В. Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Докл. АНСССР, 290:4, 777–780; англ. пер.: Vedenyapin V. V. Boundary value problems for the steady-state Vlasov equation. Soviet Math. Dokl., 34:2 (1987), 335–338.
28. Веденяпин В. В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача. Докл. АНСССР, 323:6 (1992), 1004–1006; англ. пер.: Vedenyapin V. V.

On the classification of steady-state solutions of Vlasov’s equation on the torus, and a boundary value problem. Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 45:2 (1992), 459–462.

29. Архипов Ю.Ю., Веденяпин В. В. О классификации и устойчивости стационарных решений уравнения Власова на торе и в граничной задаче// Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 203, Наука, М., 1994, 13–20; англ. пер.: Arkhipov Yu. Yu., Vedenyapin V. V. On the classification and stability of steady-state solutions of Vlasov’s equation on a torus and in a boundary value problem// Proc. Steklov Inst. Math., 203 (1995),

30.Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали по Больцману.Докл. РАН, 422:2 (2008), 161–163; англ. пер.: Vedenyapin V. V. Time averages and Boltzmann extremals. Dokl.Math., 78:2 (2008), 686–688.

31. Аджиев С.З., Веденяпин В.В. Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.

32.Веденяпин В.В.,Воронина М.Ю., Русcков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН, 2020, том 495, с. 9–13.

33. MilneE.A. Relativity, Gravitation and World–Structure (Oxford Univ. Press, 1935).

34. McCrea W.H., Milne E.A. Quart. J. Math. 5, 73 (1934).

35. Gurzadyan V.G., The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory 105, 42 (1985).

36.Gurzadyan V.G., On the common nature of Dark Energy and Dark Matter. Eur. Phys. J. Plus **134**, 14 (2019).

37.Gurzadyan V.G., Stepanyan A. The cosmological constant derived via galaxy groups and clusters. Eur. Phys. J. C **79**, 169 (2019).

38. V.V. Vedenyapin, N.N. Fimin, V.M. Chechetkin, The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus, **136**, № 670 (2021).

39.Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.

40. Лукаш В. Н., Рубаков В. А. Темная энергия: мифы и реальность // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 301–308.

41. В. В. Веденяпин, “О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **504** (2022), 51–55 V. V. Vedenyapin, “On derivation of equations of

electrodynamics and gravitation from the principle of least action, the Hamilton–Jacobi method, and cosmological solutions”, *Dokl. Math.*, **105**:3 (2022), 178–182.

42. В. В. Веденяпин, В. И. Парёнкина, С. Р. Свирщевский, “О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **62**:6 (2022), 1016–1029 V. V. Vedenyapin, V. I. Parenkina, S. R. Svirshchevskii, “Derivation of the equations of electrodynamics and gravity from the principle of least action”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **62**:6 (2022), 983–995