

Лекция 1.

I) Дифференциальная ДС с фазовым пространством M и дискретным временем.

Всегда фазовое пространство - это

нормованное метрическое пространство = Полное метрическое пространство

Пример: $M = \mathbb{R}^n$, или $M = H$ - Гильберт.
 Пространство со счётным базисом, или
 $M = L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$. или M - Зада-
 чное пространство в одном из $\max$
 пространств. или $M = \mathbb{Z}$. до 10 п. 1.1

Дифференциальная ДС с дискр. временем - это

отображение $F: M \rightarrow M$ и его итерации,

$$(1) \quad F^n = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n, \quad n = 0, 1, 2, \quad F^0 = id.$$

Всегда в наших лекциях F будет
 макс. непрерывно и макс. ограничено. Т.е.:

$\forall$ ограниченное подпространство $M^0 \subset M$,

$F|_{M^0}$ непрерывно

и $F|_{M^0}$ ограничено

(это второе
 следует из
 первого)

Пример: А) $M = \mathbb{R}^n$,

$V(x)$ - макс. лок.
 векторное поле

$$(1) \quad \dot{x}(t) = V(x(t)), \quad t \geq 0.$$

Предполагаем, что $\exists$ решение $x(t)$, $\forall t \geq 0$.

- 1.1 -

В дальнейшем будем считать на это
рез-т как Предложение 1.1

Предложение 1.1 Пусть M — полное метри-
ческое пространство.

Если для любого $\varepsilon > 0$ всегда
существует неотрицательное $\delta \in M$ такая
функция δ — сепаратор, то M сепарабельно.

2) Если $\sqrt{\delta}$ M называется система
точек x_a , $a \in (0,1)$, таких что
 $\text{dist}(x_a, x_{a'}) \geq \delta$ для $a \neq a'$,
то M не сепарабельно.

Лемма 1.1 а) достаточно Предложение

б) Достаточно, что δ — непрерывная
 $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, сепаратор.
 $a \in L_\infty(0,1)$ — нет.

б) Достаточно, что непрерывная
 $C^k[0,1]$, $k=0,1,2,\dots$ сепаратор, и

$C^\alpha[0,1]$, $0 < \alpha < 1$ — нет.

Док., что пространство непрерывных функций
на $[0,1]$ не сепарабельно.

Результат 20

Р. 1

$F: x_0 \mapsto \sigma(t)$, где $\sigma(t)$ — решение (1),
равное x_0 при $t=0$.

Оно лок. минимума

б) Если $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ замкн. область,
инвариантная гл. (1), то

$\tilde{F}: F|_{\tilde{M}}$ тоже верно.

II. Случайные ДС с ^{полными} выражениями
пространства M и функ. времени

⊗ Случай гл. Т В | [А] лангитт, Вероятность

[4] А.Н. Жиряев "Вероятность"
[Ф] Феллер, "Введение в Т В", т. 2
 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство
Всегда известно считать, что это —
 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{G})$

$\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств (Всегда!)

$\mathcal{G}$ — мера Лебеля

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2), \dots$ —

независимые копии этого $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Рассмотрим ^{вероятн.} произведение

$$\begin{aligned} (\Omega, \mathcal{F}, P), \quad \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \dots \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3 \times \dots \\ P &= P_1 \otimes P_2 \otimes P_3 \otimes \dots \end{aligned} \quad \text{см [4]}$$

т. е., $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)\}$.

Рассмотрим нестационарное отображение

$$F_x^* : M \times \Sigma_x \longrightarrow M, \quad x \mapsto F_x^w(x) =: F^w(x)$$

Универсальны $F_j, j=1, \dots, n$, так

$$F_j^* : M \times \Sigma \longrightarrow M, \quad (x, w) \mapsto F_j^{w_j}(x) =: F_j^{w_j}(x) =$$

$w = (w_1, w_2, \dots)$

Наконец, положим

$$(2) \quad \begin{cases} F^{nw}(x) = F_n^w \circ \dots \circ F_2^w \circ F_1^w(x) = \\ = F_*^{w_n} \circ \dots \circ F_*^{w_2} \circ F_*^{w_1}(x) \end{cases}$$

ср. (1)!

Это верно нехитро, т.к. не сложно

написать разложение отображения на
отображения F_j^* , тогда всё было ясно...
в этом смысле

Положим $\xi = F^*$ будем
более строгими. а именно:

пусть $\xi : \Sigma \rightarrow M$ — с.б.,

т.е. отображение, измеримое по

$$(3) \quad \xi : (\Sigma, \mathcal{F}) \longrightarrow (M, \mathcal{B}),$$

где $\mathcal{B}$ — σ -алгебра σ -матриц в M
(см. [Ф, В]). ξ всегда будет работать

с F_* всегда

$$F_*^w(x) = F(x) + \sum w$$

$F : M \rightarrow M$ лок. лнн

Теперь M — линейное пространство (или —
 M — сепараб., $\mathcal{B}$ — σ -алгебра в M , или —
 $M = \mathbb{R}^n$)

и $F : M \rightarrow M$ — лок. лнн. отображение

Тогда, $\in \mathcal{B}(2)$

$$F_j^w(x) = F(x) + \xi_j^w(x) \in M$$

мы будем изучать отображения F^w как $\in \mathcal{B}(2)$
с такими F_j^w .

Второе определение: Тэрион
метрическое $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и на нём с.в.:
 $\xi: \Omega \rightarrow M$, как $\in \mathcal{B}(3)$. Пусть

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность
независимых с.в., распределённых как ξ .
А именно: $D(\xi_j) = D(\xi) =: \mu \in \mathcal{P}(M)$.

Т.е., для любого другого м-ва $Q \in M$,
 $P(\xi_j \in Q) = P(\xi \in Q)$, $\forall j$.

Другими словами, $\xi_1, \xi_2, \dots$ — неза-
висимые идентичные с.в. ξ .

Далее,

$$F_j^w(x) = F(x) + \xi_j^w$$

и снова

$$(4) \quad F^w(x) = F_n^w(x) \circ \dots \circ F_1^w(x)$$

Задача 2. Проверьте, что (2) —
расширенный случай (4).

В определённом смысле (4)
эквивалентно (2). На самом деле,
в каком именно смысле

9. Дугу работаем с маркетом (4).

Дано маркет с суммируемой маркетом

$\{x_n^w, n=0, 1, \dots\}$. Каким образом задано:

(5') $x_0 = x_{00} \in M$; и

(5) $x_{n+1}^w = F_n^w(x_n^w) = F(x_n^w) + \xi_n^w, n \geq 0,$

Эквивалентно, положим

$F^{nw}(x) = F_n^w \circ F_{n-1}^w \circ \dots \circ F_0^w(x)$.

Тогда

$x_{n+1}^w = F^{nw}(x_{00})$.

См. (1).

Обозначение

$N_0 = N \cup \{0\}$.

Всего w или $x_0 \in M$ — это не-суммируемый вектор,

или $x_0 = x_0^w \in M$ — с.в., независимая

от всех $\xi_j, j \geq 0$.

К тому, $\{x_n^w, n \in N_0\}$ — маркетом,

забывающая от суммируемого маркетом w .
Эти маркетом можно назвать. 9. Дугу можно-
нать, что $\{x_n^w, n \geq 0\}$ — это $\sqrt{L}$ маркетом (5'), (5)
или $\sqrt{L}$ маркетом (5'), (5) маркетом с
вероятностью 1.

Математическая индукция. Про "с вероятн. 1".

Обозначение. Дано допустимо

пространство M , $P(M)$ — совокупность допустимых мер на M , $\mathcal{C}(M)$.

$P(M)$ — банахово пространство:

$\mu_1, \mu_2 \in P(M), 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2 \in P(M)$

Понятно для $\mu \in \mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ положим

$$\mu_n = \mathcal{D}(x_n^w) \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),$$

т.е. $\mu_n(Q) = \mathcal{P}(x_n^w \in Q)$.

изучать $\mathcal{D}(\mathcal{S}) =$ изучать динамику мер μ_n .

Почему так?

Факт 1 (см. I 1, II, III). Пусть $\eta: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ —

с.в., и $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M})$. Обозначим $\mathcal{D}(\eta) = \mu$.

Тогда

$$\mathbb{E} f(\eta) = \int f(x) \mu(dx)$$

Пусть

Образ меры при отображении. Пусть M и M' —

польные пространства. $F: M \rightarrow M'$ —

измеримое (по Борелю) отображение.

(Жирным, F непрерывно). Если $\nu \in \mathcal{P}(M)$,

то $F \circ \nu \in \mathcal{P}(M')$ — образ меры μ

при отображении F . — определяется так:

$$(8) \quad F \circ \nu(Q) = \nu(F^{-1}(Q)), \quad \forall Q \in \mathcal{B}(M').$$

Замечание. Возможные обозначения:

$$F \circ \nu = F \# \nu = F_*(\nu).$$

Факт 2. Пусть $\eta: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ — с.в., $\mathcal{D}(\eta) = \mu$.

Пусть $F: M \rightarrow M'$ измеримо. Тогда

$$\mathcal{D}(F \circ \eta) = F \circ \mu.$$

Задача 5. Докажите это.