Торическая топология

В.М.Бухштабер

Математический институт им. В.А.Стеклова, РАН

⟨buchstab@mi.ras.ru⟩

Общеинститутский математический семинар
Санкт-Перербургского отделения Математического института
им. В.А.Стеклова, РАН

Санкт-Перербург

10 октября 2011

Доклад посвящен ключевым результатам и приложениям торической топологии — новой области исследований на стыке эквивариантной топологии, комбинаторики многогранников, алгебраической, комплексной и симплектической геометрий, активно развивающейся последние 15 лет.

Основной объект изучения — действия компактного тора с богатой комбинаторной структурой на пространствах орбит.

Такие действия естественно возникают в различных разделах математики.

В докладе будет представлена функториальная конструкция действий, позволившая получить торические представители в каждом классе комплексных кобордизмов гладких многообразий, ввести новые комбинаторные инварианты выпуклых многогранников и триангуляций пространств.

Будет представлен новый класс многогранников, содержащий известные серии многогранников. Каждый многогранник этого класса удовлетворяет гипотезе Гала и является образом отображения моментов неособого торического многообразия. Получено решение известных задач о сигнатуре и эйлеровой характеристике таких многообразий.

В различных разделах геометрии — римановой, комплексной, алгебраической, симплектической и лагранжевой — хорошо известна проблема построения классов многообразий с фундаментальными геометрическими структурами.

Торическая топология дала эффективные методы построения широкого класса комплексных некэлеровых многообразий, лагранжевых подмногообразий со свойствами минимальности, класса римановых многообразий со специальными ограничениями на кривизну.

Содержание

Обозначения и соглашения

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ поле вещественных и комплексных чисел, соответственно.

Обозначим через $\mathbb{Z}^n$ свободную абелеву группу с базисом $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на j-ом месте, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Положим $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}^n = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{C}$.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как евклидово пространство с каноническим скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

и канонической ориентацией, задаваемой базисом e_j, $j = 1, \ldots, n$.

Будем отождествлять $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ при помощи изоморфизма над $\mathbb{R}$, который переводит e_j в e_{2j-1} и $(\sqrt{-1})e_j$ в e_{2j}.
Фиксируем каноническую ориентацию в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим через $\mathbb{T}^n$ стандартный n-мерный тор $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.
Отождествим $\mathbb{T}^n$ с многообразием
$\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1\}$ и образом при проекции $\exp\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n : \exp 2\pi\sqrt{-1}\, x = z$, где $z_j = \exp(2\pi\sqrt{-1}x_j),\ j = 1, \ldots, n$.

Тор $\mathbb{T}^n$ также имеет каноническую ориентацию.

Существуют два алгоритмически различных способа определить выпуклый многогранник P в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Выпуклым многогранником* в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_q)$ конечного набора точек $v_1, \ldots, v_q$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. *Выпуклым полиэдром* в $\mathbb{R}^n$ называется пересечение конечного набора полупространств в $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (a_i, x) + b_i \geqslant 0, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$.
Ограниченный выпуклый полиэдр называется *(выпуклым) многогранником* P.

Подмножество в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой оболочкой конечного набора точек тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного набора полупространств и ограничено.

Симплексом Δ^k размерности k в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка набора из $(k+1)$ точек в $\mathbb{R}^n$, не лежащих в одной аффинной $(k-1)$-мерной плоскости. Все грани k-мерного симплекса являются симплексами размерности не выше k.

Стандартным n-симплексом называется выпуклая оболочка точек $e_1, \ldots, e_n$ и $0 = (0, \ldots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$. Стандартный n-симплекс задается $(n+1)$ неравенствами

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad \text{и} \quad -x_1 - \ldots - x_n + 1 \geqslant 0.$$

Правильным n-симплексом называется выпуклая оболочка точек $e_1, \ldots, e_{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Симплициальные и простые многогранники

Два различных определения выпуклых многогранников приводят к двум различным понятиям многогранников *общего положения*.

Набор из $m > n$ точек $\mathbb{R}^n$ находится в *общем положении*, если никакие $n + 1$ из них не лежат на одной аффинной гиперплоскости.

С точки зрения определения 1, выпуклый многогранник является многогранником общего положения, если он является выпуклой оболочкой набора точек в общем положении.

Все собственные грани такого многогранника являются симплексами, то есть любая гипергрань имеет минимальное возможное число вершин (а именно, n).
Такие многогранники называются *симплициальными*.

Набор из $m > n$ гиперплоскостей $\langle a_i, x \rangle + b_i = 0$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ находится *в общем положении*, если никакая точка не содержится более чем в n гиперплоскостях.

С точки зрения определения 2, выпуклый многогранник P^n является многогранником общего положения, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении.

В каждой вершине такого многогранника P^n сходятся в точности n гиперграней. Такие многогранники называются *простыми*.

Каждая грань простого многогранника есть снова простой многогранник.

Определение. Для любого выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ определено *полярное множество*

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, x' \rangle + 1 \geqslant 0 \ \text{ для всех } \ x' \in P\}.$$

Многогранник P^* называется *полярным* (или *двойственным*) к P.

Если P^* многогранник, то его решетка граней получается из решетки граней P обращением отношения порядка; в частности, если P – простой многогранник, то P^* – симплициальный, и наоборот.

Момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$

Положим

$$\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Конструкция. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник (см. определение 2) с $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Образуем $(m \times n)$-матрицу A_P, строками которой являются векторы a_i, записанные в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$, т.е. $(A_P)_{ij} = (a_i)_j$. Матрица A_P имеет ранг n. Положим $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (A_P x + b)_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Образом аффинного отображения

$$L_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ L_P(x) = A_P x + b$$

является n-мерная плоскость

$$\{y \in \mathbb{R}^m \ :\ y = A_P x + b\} \subset \mathbb{R}^m,$$

и $L(P) = \operatorname{Im} L_P(P)$ есть пересечение этой плоскости с положительным конусом $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$.

Пусть C – матрица размера $(m-n)\times m$ ранга $(m-n)$ такая, что $CA_P = 0$. Тогда

$$L(P) = \{y \in \mathbb{R}^m \colon Cy = Cb,\ y_i \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Пример. Стандартный симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ имеет $m = n + 1$ гиперграней и может быть задан по определению 2 с

$$a_i = e_i,\ i = 1, \ldots, n,\ a_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} e_i, \ \text{ и } \ b = e_{n+1}.$$

Возьмем $C = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$L(\Delta^n) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \colon Cy = Cb,\ y_i \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, n{+}1\},$$

где $Cy = y_1 + \ldots + y_{n+1}$ и $Cb = 1$.
Получили правильный n-симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Каноническое действие стандартного тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ задает проекцию на пространство орбит $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \mathbb{C}^m/\mathbb{T}^m$

$$\rho\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m_{\geqslant} \,:\, \rho(z_1, \ldots, z_m) = (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2).$$

Используя вложение $L_P\colon P \to \mathbb{R}^m_{\geqslant}$, мы получаем пространство $\mathscr{Z}_P$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_P & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ {\scriptstyle\rho_P}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ P & \xrightarrow{L_P} & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{array}$$

Точку $z \in \mathscr{Z}_P$ можно однозначно записать в виде

$$z = (|z_i| \exp(2\pi\sqrt{-1}\varphi_i),\ i = 1, \ldots, m),$$

где $|z_i| \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi_i < 1$.

Таким образом, точка $z \in \mathscr{Z}_P$ имеет угловые координаты $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ и моментные координаты $(y_1, \ldots, y_m)$, где $L_P\rho_P(z) = (y_1, \ldots, y_m)$ и $y_i = |z_i|^2$.

По построению, $\mathscr{Z}_P/\mathbb{T}^m = P$.

Пусть P_1 и P_2 простые многогранники. Тогда

$$\mathscr{Z}_{P_1 \times P_2} = \mathscr{Z}_{P_1} \times \mathscr{Z}_{P_2}.$$

Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — упорядоченный набор гиперграней многогранника P.

Кольцом Стенли-Рейснера $\mathbb{Z}(P)$ многогранника P называется градуированное кольцо

$$\mathbb{Z}(P) = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/J, \quad \deg v_i = 2.$$

Здесь J — идеал, порожденный мономами $\omega = v^{i_1} \cdots v^{i_k}$, где ω пробегает наборы, такие, что $F^{i_1} \cap \cdots \cap F^{i_k} = \emptyset$.

Теорема. Для любого простого многогранника P имеет место изоморфизм градуированных алгебр

$$H^*(\mathscr{Z}_P; \mathbb{Z}) = \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[P], \mathbb{Z}),$$

где структура $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$-модуля в $\mathbb{Z}[P]$ задается канонической проекцией

$$\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m] \longrightarrow \mathbb{Z}[P].$$

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ *простой* многогранник, задаваемый матрицей $A = A_P$ и вектором b. Без ограничения общности можно считать, что $a_i = e_i,\ i = 1, \ldots, n$, т.е. $A^\top = (I_n, A_*^\top)$, где I_n – единичная матрица и A_* – матрица со строками $a_{n+k},\ k = 1, \ldots, m-n$.

Теорема. (В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, N. Ray)

1. $\mathscr{Z}_P = \bigcap\limits_{k=1}^{m-n} \mathscr{F}_k$, где

$$\mathscr{F}_k = \{z \in \mathbb{C}^m \ : \ \sum_{i=1}^{n} a_{n+k,i}(|z_i|^2 - b_i) = |z_{n+k}|^2 - b_{n+k}\}.$$

2. $\mathscr{Z}_P$ является $(n+m)$-мерным *гладким оснащенным* многообразием с гладким действием тора $\mathbb{T}^m$ и называется *момент-угол* многообразием.

3. Диагональная окружность $S^1_d = \{z \in \mathbb{T}^m, z_1 = \ldots = z_m\}$ действует на $\mathscr{Z}_P$ свободно, и, следовательно, определены гладкое многообразие $\mathscr{Z}_P/S^1$ и гладкое многообразие $\mathscr{W} = \mathscr{Z}_P \times_{S^1} D^2$ с границей $\partial\mathscr{W} = \mathscr{Z}_P$.

Пусть $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ стандартный симплекс.
Тогда $m = n + 1$ и

$$\mathscr{Z}_{\Delta^n} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1 \right\} = S^{2n+1},$$

$\mathscr{Z}_{\Delta^n}/S^1 = \mathbb{C}P^n$ и $\mathscr{W} \to \mathbb{C}P^n$ — расслоение со слоем D^2, ассоциированное с расслоением Хопфа $E \to \mathbb{C}P^n$.

Согласно классическому результату Калаби и Экмана, многообразие $S^{2n_1+1} \times S^{2n_2+1}$ имеет структуру комплексного многообразия $M^{2(n_1+n_2+1)}$, которое является пространством голоморфного расслоения

$$M^{2(n_1+n_2+1)} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n_1} \times \mathbb{C}P^{n_2}.$$

Слоем этого расслоения является тор T^2 со структурой одномерного абелева многообразия, то есть эллиптической кривой.

При $n_2 = 0$ этот результат был получен Хопфом.

Пусть P – простой n-мерный многогранник с m гипергранями. Положим $M^{2q} = \mathscr{Z}_P$, если $n+m = 2q$, и $M^{2q} = \mathscr{Z}_P \times S^1$, если $n+m = 2q-1$.

Теорема(Боссио, Меерсман; Т.Панов, Ю.Устиновский). Многообразие M^{2q} имеет структуру комплексного многообразия с голоморфным действием тора T^{2q-n}.

Если тор $T^k \subset T^{2q-n}$, где $n+k = 2l$, действует свободно на M^{2q}, то M^{2q}/T^k имеет структуру комплексного многообразия с голоморфным действием тора $T^{2(q-l)}$ и проекция $M^{2q} \to M^{2q}/T^k$ является голоморфным расслоением, слой которого — тор $T^{2(q-l)}$ со структурой $(q-l)$-мерного абелева многообразия.

Многообразие M^{2q}, является *некэлеровым*, так как $H^2(\mathscr{Z}_P;\mathbb{Z}) = 0$.

Свободные действия тора на $\mathcal{Z}_P$

Для каждого простого многогранника P обозначим через $s = s(P)$ максимальную размерность подгрупп $T^q \subset \mathbb{T}^m$, которые действуют на $\mathcal{Z}_P$ свободно.
Число $s(P)$ (число Бухштабера) является комбинаторным инвариантом многогранника P.

Проблема. (В. М. Бухштабер, 2000)
Найти эффективный способ вычисления числа $s(P)$ по комбинаторике многогранника P.

Стационарная подгруппа любой точки из $\mathcal{Z}_P$ является координатной подгруппой, она пересекается с диагональной окружностью S^1_d лишь по единице. Следовательно, группа S^1_d действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно, и $s(P) \geqslant 1$.

Стационарные подгруппы вершин n-мерного многогранника имеют размерность n. Каждая подгруппа $T^q \subset \mathbb{T}^m$ для $q > m - n$ нетривиально пересекается с любой n-мерной стационарной подгруппой, и поэтому не может действовать на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Таким образом, $s(P) \leqslant m - n$.

Пусть $\{F_1, \ldots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P и $[k] = \{1, \ldots, k\}$. Сюръективное отображение $\varrho\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to [k]$ называется *правильной раскраской* многогранника P в k цветов, если $\varrho(F_i) \neq \varrho(F_j)$ когда $F_i \cap F_j \neq \emptyset$.

Хроматическим числом $\gamma(P)$ многогранника P называется минимальное число k, для которого существует правильная k-цветная раскраска.

Имеем $\gamma(P^n) \geqslant n$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая двумерная грань в P^n имеет четное число ребер. Заметим также, что $\gamma(P^3) \leqslant 4$ по теореме о четырех красках.

И. В. Изместьев показал (2001), что

$$s(P) \geqslant m - \gamma(P).$$

Выделим следующие результаты Н. Ю. Ероховца:

1. Если $s(P) = 1$, то $m - n = 1$ и $P = \Delta^n$ – симплекс.

Известно, что если $m - n < 3$, то $P = \Delta^k \times \Delta^{n-k}$ и $s(P) < 3$. Пусть $f_i(P)$ – число i-мерных граней многогранника P и $\gamma(P)$ – его хроматическое число.

2. Если $m - n = 3$, то $2 \leqslant s(P) \leqslant 3$ и существуют n-мерные многогранники с $n + 3$ гипергранями такие, что $f_i(P) = f_i(Q)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, и $\gamma(P) = \gamma(Q)$, но $s(P) = 2$, а $s(Q) = 3$.

3. $s(P) \geqslant \left[\frac{m}{n+1}\right]$ для простого многогранника P.

4. $s(P \times Q) \geqslant s(P) + s(Q)$.

5. $s(P \times Q) \leqslant s(P) + s(Q) + \min\{k_1 - s(P), k_2 - s(Q)\}$, где $k_l = m_l - n_l$, $l = 1, 2$.

Пусть $\{F_1, \ldots, F_m\}$ – множество гиперграней *простого* многогранника P^n.

Определение. Целочисленная $(n \times m)$-матрица Λ задает характеристическое отображение

$$\ell\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \longrightarrow \mathbb{Z}^n,$$

если ее столбцы $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}$ образуют базис в $\mathbb{Z}^n$ для любой вершины $v = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_n}$.

Матрица Λ задает эпиморфизм $\ell\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$. Группа $K(\Lambda) = \ker \ell$ ранга $(m-n)$ действует свободно на $\mathscr{Z}_P$.

Таким образом, $s(P) = m - n$ тогда и только тогда, когда существует характеристическое отображение ℓ.

Определение. Комбинаторными *квазиторическими данными* называется пара (P, Λ), где P – ориентированный комбинаторный простой многогранник и Λ – целочисленная $(n \times m)$-матрица, задающая характеристическое отображение.

Квазиторические многообразия

Пространство орбит $M = \mathscr{Z}_P/K(\varLambda)$ является $2n$-мерным гладким многообразием с действием n-мерного тора $T^n = \mathbb{T}^m/K(\varLambda)$.
Обозначим это действие через α.

Лемма. Действие α удовлетворяет условиям *Davis–Januszkiewicz*:

1. α локально изоморфно стандартному покоординатному действию $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{C}^n$;

2. существует проекция $\pi\colon M \to P$, слоями которой являются орбиты действия α.

Определение. Многообразие $M = M(P, \varLambda)$ называется *квазиторическим со структурой* $(A, \varLambda, b)$, где пара (A, b) задает простой многогранник P, т.е. $A = A_P$.

Торические многообразия

В алгебраической геометрии *неособое проективное торическое* многообразие X определяется простым многогранником

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a_i, x\rangle + b_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\},$$

вершины которого лежат в решетке $\mathbb{Z}^n$, и наборы векторов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$.

В этом случае определено характеристическое отображение $\ell \colon \{F_1, \ldots, F_m\} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ при помощи матрицы $A^\top$, которая задает эпиморфизм $\ell \colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ и его комплексификацию $\ell_{\mathbb{C}} \colon (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^n$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$.

Квазиторические многообразия были введены Дэвисом и Янушкевичем как топологические аналоги торических многообразий.

Положим $V_{i_1,\ldots,i_k}(P) = \{z \in \mathbb{C}^m \ : \ z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0$, и $V(P) = \bigcup V_{i_1,\ldots,i_k}(P)$, где объединение берется по всем наборам $(i_1, \ldots, i_k)$ таким, что $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} = \varnothing$ в P.

В. В. Батырев показал, что каждое неособое проективное торическое многообразие X является фактором пространства $U(P) = \mathbb{C}^m \setminus V(P)$ по каноническому действию группы $K(\Lambda^\top)_\mathbb{C} = \ker \ell_\mathbb{C}$.

Приведенная конструкция квазиторического многообразия $M(P, \Lambda)$ отличается от конструкции Дэвиса и Янушкевича и является топологическим аналогом конструкции В. В. Батырева.
Она была предложена в работе В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и N. Ray.

Свойства квазиторических многообразий

Следующие результаты существенно используют нашу конструкцию квазиторических многообразий.

Теорема. Комбинаторные данные (P,Λ) задают каноническую T^n-инвариантную стабильно комплексную структуру на многообразии $M(P,\Lambda)$.

Каноническая T^n-инвариантная стабильно комплексная структура на $M(P,\Lambda)$ позволяет для каждой неподвижной точки x ввести знак $\sigma(x)$ (см. ниже), причем, если T^n-инвариантная структура является почти комплексной, то $\sigma(x)=1$ для всех неподвижных точек.

Рассмотрим проекцию $\pi\colon M(P,\Lambda)\to P$.
Множество гиперграней $\{F_1,\dots,F_m\}$ многогранника P определяет множество взаимно транверсальных подмногообразий $M_j = \pi^{-1}(F_j)$, $j=1,\dots,m$, коразмерности 2 в $M(P,\Lambda)$.

Пусть $v = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_n}$ – вершина многогранника P. Тогда $x = \pi^{-1}(v) = M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ – неподвижная точка T^n-действия α на $M(P, \Lambda)$. Имеем взаимно однозначное соответствие между множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_N\}$ и множеством неподвижных точек $\{x_1, \ldots, x_N\}$ действия α.

Касательное пространство τ_x к $M = M(P, \Lambda)$ в неподвижной точке x как $2n$-мерное вещественное пространство разлагается в сумму

$$\tau_x(M(P, \Lambda)) = \nu_{j_1}|_x \oplus \ldots \oplus \nu_{j_n}|_x,$$

где $\nu_j \to M_j$ – нормальное расслоение к подмногообразию M_j в M.

В терминах пары (P, Λ) задается структура комплексного одномерного расслоения в ν_j для каждого $j = 1, \ldots, m$.

Лемма. Пусть $x = M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ – неподвижная точка.

1. $\sigma(x) = 1$, если ориентация пространства $\tau_x(M)$, задаваемая стабильно комплексной структурой в M, совпадает с ориентацией расслоения
$\nu_{j_1}|_x \oplus \ldots \oplus \nu_{j_n}|_x$, определенного ориентациями расслоений ν_{jk}, $k = 1, \ldots, m$,
и $\sigma(x) = -1$ в противном случае.

2. $\sigma(x) = \operatorname{sign}(\det(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}) \det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}))$.

А. А. Кустарев (2009) показал, что каноническая T^n-инвариантная стабильно комплексная структура на $M(P, \Lambda)$ эквивалентна T^n-инвариантной *<u>почти комплексной</u>* структуре тогда и только тогда, когда $\sigma(x) = 1$ для любой неподвижной точки.

Пусть M^{2n} – гладкое многообразие, обладающее вложением $M^{2n} \subset \mathbb{R}^{2(k+n)}$ с *комплексным* нормальным расслоением $\nu \to M^{2n}$. Тогда определены числа Чженя $c_\omega(M^{2n}),\ \omega = (i_1, \ldots, i_q),\ i_1 + \ldots + i_q = n$.

Теорема. (В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, N. Ray, 2007) При $n > 1$ существует квазиторическое многообразие $M^{2n}(P, \Lambda)$ такое, что $c_\omega(M^{2n}) = c_\omega(M^{2n}(P, \Lambda))$.

Следствие. Каждый класс комплексных кобордизмов Милнора-Новикова $[M^{2n}],\ n > 1$, имеет квазиторический представитель.

Получены явные формулы, выражающие числа Чженя $c_\omega(M(P, \Lambda))$ в терминах комбинаторных данных (P, Λ).

Вопрос Ф. Хирцебруха (1958):
"Когда набор чисел Чженя $\{c_\omega(M^{2n})\}$ является набором чисел Чженя *связного* алгебраического многообразия?"
до сих пор остается без ответа.

Гамильтоновы торические многообразия

Пусть $\mathfrak{G}(T^n) = \mathbb{R}^n$ – алгебра Ли тора T^n.

Гамильтоновым T^n-многообразием называется тройка $(M^{2n}, \omega, \mathscr{H})$, где (M^{2n}, ω) – *симплектическое* многообразие и $\mathscr{H} : M^{2n} \to \mathfrak{G}(T^n)^*$ – отображение *моментов*.

Гамильтоновым торическим многообразием называется компактное связное гамильтоново T^n-многообразие $(M^{2n}, \omega, \mathscr{H})$ с эффективным действием тора T^n.

Пусть P^n выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^N$ и $\{F_1, \ldots, F_m\}$ набор его гиперграней. Рассмотрим выпуклую оболочку $L(P)$ многогранника $P \subset \mathbb{R}^N$.
Выберем в $L(P)$ базис $A = \{a_i\}$ и зададим в $L(P)$ скалярное произведение и A-координаты условием, что базис A ортонормален.

Определение. Многогранник $P^n \subset \mathbb{R}^N$ называется *многогранником Дельзанта*, если в $L(P)$ существует такой базис A, что для каждой вершины
$v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} \in P$ существуют A-целочисленные вектора $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}$, образующие базис в группе $\mathbb{Z}^n$ всех A-целочисленных векторов, где ξ_{i_k} параллелен нормали к гиперплоскости $F_{i_k},\ k = 1, \ldots, n$.

Теорема. (Delzant, 1988)
Существует *взаимно однозначное* соответствие между многогранниками Дельзанта
и гамильтоновыми торическими многообразиями.

Рассмотрим $\mathbb{C}^m$ как симплектическое многообразие с симплектической формой

$$\omega = 2\sum_{k=1}^{m} dx_k \wedge dy_k, \text{ где } x_k + \sqrt{-1}y_k = z_k.$$

Стандартное действие тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ является гамильтоновым с отображением моментов

$$\mathscr{H} : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathfrak{G}(\mathbb{T}^m)^* \simeq \mathbb{R}^m \ : \qquad \mathscr{H}(z_1, \ldots, z_m) = (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2).$$

Пусть

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (A_P x + b)_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, m\}$$

многогранник Дельзанта. Тогда матрица $\Lambda = A^\top$ задает характеристическое отображение

$$\ell \colon \{F_1, \ldots, F_m\} \longrightarrow \mathbb{Z}^n.$$

Теорема. Квазиторическое многообразие $M(P, A^\top) = \mathscr{Z}_P / K(A^\top)$, где $\mathscr{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ и $K(A^\top) \subset \mathbb{T}^m$, является гамильтоновым торическим многообразием, полученным как симплектическая редукция действия тора $K(A^\top)$ на $\mathbb{C}^m$.

Производящие множества и простые графы

Совокупность $\mathscr{B}$ непустых подмножеств в $[n+1] = \{1,\ldots,n+1\}$ называется *<u>производящим</u>* множеством на $[n+1]$, если:

(1) $S', S'' \in \mathscr{B}$ и $S' \cap S'' \neq \varnothing \implies S' \cup S'' \in \mathscr{B}$;

(2) $\{i\} \in \mathscr{B}$ для всех $i \in [n+1]$.

Производящее множество $\mathscr{B}$ на $[n+1]$ называется *<u>связным</u>*, если $[n+1] \in \mathscr{B}$.
Для $S \subset [n+1]$ положим $\mathscr{B}|_S = \{S' \in \mathscr{B};\ S' \subseteq S\}$.
Обозначим через $|S|$ число элементов в S.

Граф Γ называется *<u>простым</u>*, если он не имеет петель и кратных ребер.

Пусть Γ – простой связный граф с вершинами $1,\ldots,n+1$. Обозначим через $\mathscr{B}(\Gamma)$ совокупность непустых подмножеств $S \subset [n+1]$ таких, что граф $\Gamma|_S$ является связным. Ясно, что $\mathscr{B}(\Gamma)$ является производящим множеством на $[n+1]$.

Нестоэдры и граф-ассоциэдры

Пусть $\mathscr{B}$ – производящее множество на $[n+1]$.

Положим $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = |\mathscr{B}|\}$.

Нестоэдром называется полиэдр

$$P_{\mathscr{B}} = \{x \in H \ : \ \sum_{i \in S} x_i - |\mathscr{B}|_S| \geqslant 0\},$$

где S пробегает все элементы из $\mathscr{B} \setminus [n+1]$.

Пусть Γ простой связный граф.
Нестоэдр $P_{\mathscr{B}(\Gamma)}$ называется *граф-ассоциэдром*.

Используя результаты А. Зелевинского, А. Постникова, E.-M. Feichtner, B.Sturmfels, получаем:

Теорема. Для связного $\mathscr{B}$ нестоэдр $P_{\mathscr{B}}$ является простым n-мерным многогранником.

Возьмем в гиперплоскости H решетку $\mathbb{Z}^n$ с началом в точке $O = |\mathscr{B}|e_{n+1}$ и базисными векторами $\omega_k = (e_k - e_{n+1})$.

Теорема. Нестоэдр $P_{\mathscr{B}}$ относительно базиса $\{\omega_k\}$ в решетке $\mathbb{Z}^n \subset H$ является многогранником Дельзанта.

Пример. Пусть $\mathscr{B}_\Delta$ – связное производящее множество на $[n+1]$, состоящее из точек $\{i\}$, $1,\ldots,n+1$ и всего множества $[n+1]$.

Положим $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = n+2\}$. Нестоэдр $\mathscr{B}_\Delta$ представляет собой симплекс

$$\{x \in H \ : \ x_i - 1 \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n+1\}.$$

В гиперплоскости H возьмем начало координат O в точке $(n+2)e_{n+1}$. Тогда относительно базиса $w_k = (e_k - e_{n+1})$, $k = 1, \ldots, n$, точка $x \in H$ запишется в виде $x = O + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k w_k$.

В этом базисе $P_{\mathscr{B}_\Delta}$ запишется в виде

$$P_{\mathscr{B}_\Delta} = \{x \in H \ : \ x_i - 1 \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n, \\ - \sum_{i=1}^{n} x_i + (n+1) \geqslant 0\},$$

Ассоциэдр As^n (многогранник Сташефа K_{n+2})

Пусть Γ – путь $\underset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{n}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{n+1}{\bullet}$

Производящее множество $\mathscr{B}(\Gamma)$ состоит из сегментов $[i, j]$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n + 1$. Следовательно,

$$P_{\mathscr{B}(\Gamma)} = \Big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$
$$\sum_{k=i}^{j} x_k - \frac{1}{2}((j-i+1)(j-i+2)) \geqslant 0\Big\},$$

для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n + 1$.

Пусть f_i число i-мерных граней n-мерного многогранника P. Введем:

f-вектор

$$(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}).$$

F-полином

$$F(P)(\alpha, t) = \alpha^n + f_{n-1}\alpha^{n-1}t + \cdots + f_1\alpha t^{n-1} + f_0 t^n.$$

H-полином

$$H(P)(\alpha, t) = F(P)(\alpha - t, t) =$$
$$= h_0\alpha^n + h_1\alpha^{n-1}t + \cdots + h_{n-1}\alpha t^{n-1} + h_n t^n.$$

h-вектор

$$(h_0, \ldots, h_n).$$

Классические соотношения Дена-Соммервиля для простого многогранника P эквивалентны условию

$$H(P)(\alpha,t)=H(P)(t,\alpha).$$

Следовательно,

$$H(P)(\alpha,t)=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\gamma_i(\alpha t)^i(\alpha+t)^{n-2i},$$

и для любого простого n-мерного многогранника P определены:

γ-полином

$$\gamma(P)(\tau)=\gamma_0+\gamma_1\tau+\cdots+\gamma_{[\frac{n}{2}]}\tau^{[\frac{n}{2}]},$$

γ-вектор

$$(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{[\frac{n}{2}]}).$$

Многогранник называется флаговым, если любой набор попарно пересекающихся граней имеет непустое пересечение.

Гипотеза. (Гал, 2005) Компоненты γ-вектора простого флагового многогранника неотрицательны.

2-усечением многогранника P называется многогранник Q, полученный из P срезкой грани G коразмерности 2. В этом случае верна формула

$$\gamma(Q) = \gamma(P) + \tau\gamma(G).$$

Многогранник, полученный из куба применением k операций 2-усечения, $k \geqslant 1$, имеет $2n + k$ гиперграней и называется *2-усеченным кубом*.

Следствие. Гипотеза Гала верна для 2-усеченных кубов.

Теорема. (В.Д.Володин, 2010) Нестоэдр является 2-усеченным кубом тогда и только тогда, когда он флаговый.

Следствие. Гипотеза Гала верна для флаговых нестоэдров.

Каждый 2-усеченный куб P^n является образом отображения моментов неособого торического многообразия M_P^{2n}.

Операция усечения многогранника P^n вдоль грани коразмерности 2 соответствует раздутию алгебраического многообразия M_P^{2n} вдоль подмногообразия комплексной коразмерности 2.

Таким образом, каждое алгебраическое многообразие M_P^{2n} получается из произведения комплексных проективных прямых применением k операций раздутия вдоль подмногообразий комплексной коразмерности 2 для некоторого $k \geqslant 1$.

Обозначим через $\sigma(M)$ сигнатуру многообразия M^{2n}.

Если $n = 2q - 1$, то $\sigma(M) = 0$.

Если $n = 2q$, то

$$\sigma(M_P^{4q}) = \sum_{k=0}^{2q} (-1)^k h_k(P^{2q}) = (-1)^q \gamma_q(P^{2q}) \ .$$

Следствие. $(-1)^q \sigma(M_P^{4q}) \geqslant 0$ для любого 2-усеченного куба P^{2q}.

Следствие. $\sigma(M_P^{4q}) = 0$ для любого 2-усеченного куба P^{2q}, имеющего менее $5q$ гиперграней.

Для каждого 2-усеченного куба P^n определено малое накрытие M_P^n.

Многообразие M_P^n является асферичным, т.е. является пространством Эйленберга-Маклейна.

Обозначим через $\chi(M)$ эйлерову характеристику многообразия M^n.

Если $n = 2q - 1$, то $\chi(M^{2q-1}) = 0$.

Если $n = 2q$, то

$$\chi(M_P^{2q}) = \sum_{k=0}^{2q} (-1)^k h_k(P^{2q}) = (-1)^q \gamma_q(P^{2q}) \ .$$

Следствие. $(-1)^q \chi(M_P^{2q}) \geqslant 0$ для любого 2-усеченного куба P^{2q}.

Следствие. $\chi(M_P^{2q}) = 0$ для любого 2-усеченного куба P^{2q}, имеющего менее $5q$ гиперграней.