

Эйлерово-симметричные проективные многообразия (по работе Baohua Fu и Jun-Muk Hwang)

Антон Шафаревич

09.12.2020

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — неприводимое проективное многообразие. Рассмотрим гладкую точку x многообразия Z . Будем говорить, что действие группы $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V$, которое сохраняет Z , имеет *эйлеров тип*, если x изолированная неподвижная точка в Z и индуцированное действие $\mathbb{C}^\times$ на касательном пространстве $T_x Z$ состоит из скалярных операторов.

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — неприводимое проективное многообразие.
Рассмотрим гладкую точку x многообразия Z .

Будем говорить, что действие группы $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V$, которое сохраняет Z , имеет *эйлеров тип*, если x — изолированная неподвижная точка в Z и индуцированное действие $\mathbb{C}^\times$ на касательном пространстве $T_x Z$ состоит из скалярных операторов.

Будем называть многообразие $Z \subseteq \mathbb{P}V$ *эйлерово-симметричным*, если существует открытое подмножество $U \subseteq Z$, состоящее из гладких точек, для каждой из которых существует действие $\mathbb{C}^\times$ эйлерового типа.

Система фундаментальных форм

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие и $x \in Z$ — гладкая точка.

Система фундаментальных форм

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие и $x \in Z$ — гладкая точка.

Выберем однородные координаты $z_0, \dots, z_n$ на $\mathbb{P}V$ таким образом, чтобы точка x имела координаты $[1 : 0 : \dots : 0]$.

Рассмотрим аффинную карту U_0 и соответствующие координаты на ней $y_i = \frac{z_i}{z_0}$.

Система фундаментальных форм

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие и $x \in Z$ — гладкая точка.

Выберем однородные координаты $z_0, \dots, z_n$ на $\mathbb{P}V$ таким образом, чтобы точка x имела координаты $[1 : 0 : \dots : 0]$.

Рассмотрим аффинную карту U_0 и соответствующие координаты на ней $y_i = \frac{z_i}{z_0}$.

Сделав линейную замену, можно считать, что касательное пространство $T_x Z$ задается уравнениями $y_{k+1} = \dots = y_n = 0$.

Система фундаментальных форм

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие и $x \in Z$ — гладкая точка.

Выберем однородные координаты $z_0, \dots, z_n$ на $\mathbb{P}V$ таким образом, чтобы точка x имела координаты $[1 : 0 : \dots : 0]$.

Рассмотрим аффинную карту U_0 и соответствующие координаты на ней $y_i = \frac{z_i}{z_0}$.

Сделав линейную замену, можно считать, что касательное пространство $T_x Z$ задается уравнениями $y_{k+1} = \dots = y_n = 0$.

Тогда функции $y_1, \dots, y_k$ образуют систему локальных параметров на многообразии Z в точке x .

Система фундаментальных форм

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие и $x \in Z$ — гладкая точка.

Выберем однородные координаты $z_0, \dots, z_n$ на $\mathbb{P}V$ таким образом, чтобы точка x имела координаты $[1 : 0 : \dots : 0]$.

Рассмотрим аффинную карту U_0 и соответствующие координаты на ней $y_i = \frac{z_i}{z_0}$.

Сделав линейную замену, можно считать, что касательное пространство $T_x Z$ задается уравнениями $y_{k+1} = \dots = y_n = 0$.

Тогда функции $y_1, \dots, y_k$ образуют систему локальных параметров на многообразии Z в точке x .

Тогда каждую функцию $f \in \mathcal{O}_{x,Z}$ можно разложить в ряд Тейлора в точке x .

Пусть $h_I(y_1, \dots, y_k)$ — это первый однородный член в ряде Тейлора для функции I .

Система фундаментальных форм

Пусть $h_I(y_1, \dots, y_k)$ — это первый однородный член в ряде Тейлора для функции I .

Пусть d — степень многочлена h_I . Тогда можно рассмотреть поляризацию $\hat{h}_I \in \text{Sym}^d(T_x Z)^*$ многочлена h_I .

Система фундаментальных форм

Пусть $h_I(y_1, \dots, y_k)$ — это первый однородный член в ряде Тейлора для функции I .

Пусть d — степень многочлена h_I . Тогда можно рассмотреть поляризацию $\hat{h}_I \in \text{Sym}^d(T_x Z)^*$ многочлена h_I .

Тогда *системой фундаментальных форм* многообразия Z в точке x называется подпространство $\mathbf{F}_x \subseteq \bigoplus_{d \geq 0} \text{Sym}^d(T_x Z)^*$, образованное формами $\hat{h}_I$. Через $\mathbf{F}_x^d$ будем обозначать однородное слагаемое степени d пространства $\mathbf{F}_x$.

Система фундаментальных форм

Пусть $h_I(y_1, \dots, y_k)$ — это первый однородный член в ряде Тейлора для функции I .

Пусть d — степень многочлена h_I . Тогда можно рассмотреть поляризацию $\hat{h}_I \in \text{Sym}^d(T_x Z)^*$ многочлена h_I .

Тогда *системой фундаментальных форм* многообразия Z в точке x называется подпространство $\mathbf{F}_x \subseteq \bigoplus_{d \geq 0} \text{Sym}^d(T_x Z)^*$, образованное формами $\hat{h}_I$. Через $\mathbf{F}_x^d$ будем обозначать однородное слагаемое степени d пространства $\mathbf{F}_x$.

Сделав линейную замену, можно добиться, чтобы формы $\hat{h}_1, \hat{h}_{y_1}, \dots, \hat{h}_{y_n}$ образовывали базис в $\mathbf{F}_x$.

Пусть $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}V$ — два проективных многообразия и $x_1 \in Z_1$, $x_2 \in Z_2$ две гладкие точки. Будем говорить, что системы фундаментальных форм $\mathbf{F}_{x_1}$ и $\mathbf{F}_{x_2}$ *изоморфны*, если существует линейный изоморфизм $\varphi : T_{x_1}Z_1 \rightarrow T_{x_2}Z_2$ такой, что индуцированный изоморфизм

$$\bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(T_{x_1}Z_1)^* \rightarrow \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(T_{x_2}Z_2)^*$$

переводит $\mathbf{F}_{x_1}$ в $\mathbf{F}_{x_2}$.

Теорема

Пусть Z_1 и Z_2 — невырожденные проективные многообразия в $\mathbb{P}V$, и пусть $x_1 \in Z_1$ и $x_2 \in Z_2$ — гладкие точки, причем в точках x_1 и x_2 существуют действия $\mathbb{C}^\times$ эйлера типа.

Предположим, что системы фундаментальных форм F_{x_1} и F_{x_2} изоморфны. Тогда существует автоморфизм $\varphi \in \text{PGL}(V)$, такой что $\varphi(Z_1) = Z_2$ и $\varphi(x_1) = x_2$.

Теорема

Пусть Z_1 и Z_2 — невырожденные проективные многообразия в $\mathbb{P}V$, и пусть $x_1 \in Z_1$ и $x_2 \in Z_2$ — гладкие точки, причем в точках x_1 и x_2 существуют действия $\mathbb{C}^\times$ эйлера типа.

Предположим, что системы фундаментальных форм F_{x_1} и F_{x_2} изоморфны. Тогда существует автоморфизм $\varphi \in \text{PGL}(V)$, такой что $\varphi(Z_1) = Z_2$ и $\varphi(x_1) = x_2$.

Пусть Z — невырожденное проективное многообразие в $\mathbb{P}V$, $x \in Z$ — гладкая точка и на Z есть действие $\mathbb{C}^\times$ эйлера типа в точке x . Докажем, что тогда Z однозначно определяется системой фундаментальных форм в точке x .

Теорема

Пусть Z_1 и Z_2 — невырожденные проективные многообразия в $\mathbb{P}V$, и пусть $x_1 \in Z_1$ и $x_2 \in Z_2$ — гладкие точки, причем в точках x_1 и x_2 существуют действия $\mathbb{C}^\times$ эйлера типа.

Предположим, что системы фундаментальных форм F_{x_1} и F_{x_2} изоморфны. Тогда существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{PGL}(V)$, такой что $\varphi(Z_1) = Z_2$ и $\varphi(x_1) = x_2$.

Пусть Z — невырожденное проективное многообразие в $\mathbb{P}V$, $x \in Z$ — гладкая точка и на Z есть действие $\mathbb{C}^\times$ эйлера типа в точке x . Докажем, что тогда Z однозначно определяется системой фундаментальных форм в точке x .

Можно выбрать однородные координаты $z_0, \dots, z_n$ на $\mathbb{P}V$ так, чтобы z_i были однородными относительно действия $\mathbb{C}^\times$, а точка x имела координаты $[1 : 0 : \dots : 0]$. Рассмотрим аффинную карту U_0 и соответствующие координаты y_i .

Пусть $y_1, \dots, y_k$ образуют систему локальных параметров на многообразии Z в точке x . Тогда $y_1, \dots, y_k$ однородные функции одинаковой степени относительно действия $\mathbb{C}^\times$.

Пусть $y_1, \dots, y_k$ образуют систему локальных параметров на многообразии Z в точке x . Тогда $y_1, \dots, y_k$ однородные функции одинаковой степени относительно действия $\mathbb{C}^\times$.

Так как все y_i однородные, то ряд Тейлора для функции y_i в точке x будет однородным многочленом h_{y_i} .

Пусть $y_1, \dots, y_k$ образуют систему локальных параметров на многообразии Z в точке x . Тогда $y_1, \dots, y_k$ однородные функции одинаковой степени относительно действия $\mathbb{C}^\times$.

Так как все y_i однородные, то ряд Тейлора для функции y_i в точке x будет однородным многочленом h_{y_i} .

Но тогда в окрестности точки x многообразие Z задается уравнениями $y_i = h_{y_i}(y_1, \dots, y_k)$. Это означает, что Z однозначно определяется системой фундаментальных форм $\mathbf{F}_x$.

Теорема

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — эйлерово-симметричное многообразие. Тогда группа линейных автоморфизмов $\text{Aut}(Z) \subseteq \text{PGL}(V)$ действует на Z с открытой орбитой.

Теорема

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — эйлерово-симметричное многообразие. Тогда группа линейных автоморфизмов $\text{Aut}(Z) \subseteq \text{PGL}(V)$ действует на Z с открытой орбитой.

Пусть G — связная компонента единицы $\text{Aut}(Z)$.

Теорема

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — эйлерово-симметричное многообразие. Тогда группа линейных автоморфизмов $\text{Aut}(Z) \subseteq \text{PGL}(V)$ действует на Z с открытой орбитой.

Пусть G — связная компонента единицы $\text{Aut}(Z)$.

Пусть $Z_0 \subseteq Z$ — открытое подмножество, состоящее из орбит общего положения.

Теорема

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — эйлерово-симметричное многообразие. Тогда группа линейных автоморфизмов $\text{Aut}(Z) \subseteq \text{PGL}(V)$ действует на Z с открытой орбитой.

Пусть G — связная компонента единицы $\text{Aut}(Z)$.

Пусть $Z_0 \subseteq Z$ — открытое подмножество, состоящее из орбит общего положения.

Рассмотрим точку $x \in Z_0$, в которой есть действие эйлерового типа. Обозначим через A_x соответствующую подгруппу в G .

Теорема

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — эйлерово-симметричное многообразие. Тогда группа линейных автоморфизмов $\text{Aut}(Z) \subseteq \text{PGL}(V)$ действует на Z с открытой орбитой.

Пусть G — связная компонента единицы $\text{Aut}(Z)$.

Пусть $Z_0 \subseteq Z$ — открытое подмножество, состоящее из орбит общего положения.

Рассмотрим точку $x \in Z_0$, в которой есть действие эйлерового типа. Обозначим через A_x соответствующую подгруппу в G .

Выберем аффинную окрестность U точки x и координаты $y_1, \dots, y_n$ в этой окрестности как в доказательстве предыдущей теоремы. Тогда в этой окрестности Z задается уравнениями $y_i = h_i(y_1, \dots, y_k)$, где h_i — однородный многочлен.

Теорема

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — эйлерово-симметричное многообразие. Тогда группа линейных автоморфизмов $\text{Aut}(Z) \subseteq \text{PGL}(V)$ действует на Z с открытой орбитой.

Пусть G — связная компонента единицы $\text{Aut}(Z)$.

Пусть $Z_0 \subseteq Z$ — открытое подмножество, состоящее из орбит общего положения.

Рассмотрим точку $x \in Z_0$, в которой есть действие эйлерового типа. Обозначим через A_x соответствующую подгруппу в G .

Выберем аффинную окрестность U точки x и координаты $y_1, \dots, y_n$ в этой окрестности как в доказательстве предыдущей теоремы. Тогда в этой окрестности Z задается уравнениями $y_i = h_i(y_1, \dots, y_k)$, где h_i — однородный многочлен.

Рассмотрим точку p , лежащую в пересечении Z_0 и U . В замыкании орбиты $A_x p$ будет лежать точка x .

Но орбиты точек из Z_0 замкнуты в Z_0 , поэтому получаем, что p и x лежат в одной орбите группы G .

Но орбиты точек из Z_0 замкнуты в Z_0 , поэтому получаем, что p и x лежат в одной орбите группы G .

Но тогда все точки многообразия Z , лежащие в пересечении U и Z_0 , будут лежать в одной орбите группы G .

Таким образом эйлерово-симметричные многообразия однозначно определяются системой фундаментальных форм в точках общего положения.

Таким образом эйлерово-симметричные многообразия однозначно определяются системой фундаментальных форм в точках общего положения.

Пусть W — векторное пространство. Какие подпространства в $\bigoplus_{d \geq 0} \text{Sym}^d W^*$ могут являться системой фундаментальных форм для некоторого эйлерово-симметричного многообразия?

Таким образом эйлерово-симметричные многообразия однозначно определяются системой фундаментальных форм в точках общего положения.

Пусть W — векторное пространство. Какие подпространства в $\bigoplus_{d \geq 0} \text{Sym}^d W^*$ могут являться системой фундаментальных форм для некоторого эйлерово-симметричного многообразия?

Для произвольного вектора $w \in W$ рассмотрим линейное отображение $i_w : \text{Sym}^{k+1} W^* \rightarrow \text{Sym}^k W^*$, которое отправляет $\varphi \in \text{Sym}^{k+1} W^*$ в $i_w \varphi \in \text{Sym}^k W^*$, определяемое уравнением

$$i_w \varphi(w_1, \dots, w_k) = \varphi(w, w_1, \dots, w_k).$$

Пусть r — натуральное число. Подпространство

$$\mathbf{F} = \bigoplus_k F^k \subseteq \bigoplus_k \operatorname{Sym}^k W^*$$

называется *символьной системой ранга r* , если $F^0 = \mathbb{C}$, $F^1 = W^*$, $F^r \neq 0$ и $F^{r+i} = 0$ для всех $i \geq 1$, а также

$$i_w(\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{F},$$

для любого $w \in W$.

Теорема (Élie Cartan)

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие. Тогда для точки общего положения $x \in Z$ система фундаментальных форм $\mathbf{F}_x$ в точке x является символьной системой ранга r , для некоторого натурального r .

Теорема (Élie Cartan)

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие. Тогда для точки общего положения $x \in Z$ система фундаментальных форм $\mathbf{F}_x$ в точке x является символьной системой ранга r , для некоторого натурального r .

Оказывается любая символьная система является системой фундаментальных форм для точки общего положения некоторого эйлерово-симметричного многообразия.

Теорема (Élie Cartan)

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие. Тогда для точки общего положения $x \in Z$ система фундаментальных форм $\mathbf{F}_x$ в точке x является символьной системой ранга r , для некоторого натурального r .

Оказывается любая символьная система является системой фундаментальных форм для точки общего положения некоторого эйлерово-симметричного многообразия.

Для натурального k и $w \in W$ рассмотрим композицию

$$i_w^k = \underbrace{i_w \circ \dots \circ i_w}_k.$$

Теорема (Élie Cartan)

Пусть $Z \subseteq \mathbb{P}V$ — невырожденное проективное многообразие. Тогда для точки общего положения $x \in Z$ система фундаментальных форм F_x в точке x является символьной системой ранга r , для некоторого натурального r .

Оказывается любая символьная система является системой фундаментальных форм для точки общего положения некоторого эйлерово-симметричного многообразия.

Для натурального k и $w \in W$ рассмотрим композицию $i_w^k = \underbrace{i_w \circ \dots \circ i_w}_k$. Отображение i_w^k переводит элементы из F^k в

числа. Таким образом можно рассматривать i_w^k как элемент пространства $(F^k)^*$.

Для символьной системы $\mathbf{F}$ ранга r рассмотрим рациональное отображение

$$\phi_{\mathbf{F}} : \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W \oplus (F^2)^* \oplus \dots \oplus (F^r)^*),$$

при котором

$$[t : w] \rightarrow [t^r : t^{r-1}i_w : t^{r-2}i_w^2 : \dots : ti_w^{r-1} : i_w^r].$$

Обозначим через $V_{\mathbf{F}}$ пространство $\mathbb{C} \oplus W \oplus (F^2)^* \oplus \dots \oplus (F^r)^*$, а через $M(\mathbf{F}) \subseteq \mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$ замыкание образа отображения $\phi_{\mathbf{F}}$.

Для символьной системы $\mathbf{F}$ ранга r рассмотрим рациональное отображение

$$\phi_{\mathbf{F}} : \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W \oplus (F^2)^* \oplus \dots \oplus (F^r)^*),$$

при котором

$$[t : w] \rightarrow [t^r : t^{r-1}i_w : t^{r-2}i_w^2 : \dots : ti_w^{r-1} : i_w^r].$$

Обозначим через $V_{\mathbf{F}}$ пространство $\mathbb{C} \oplus W \oplus (F^2)^* \oplus \dots \oplus (F^r)^*$, а через $M(\mathbf{F}) \subseteq \mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$ замыкание образа отображения $\phi_{\mathbf{F}}$.

Заметим, что на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ действует векторная группа W . Это аддитивное действие, нормализуемое максимальным тором.

Теорема

Пусть $\mathbf{F}$ — символьная система. Рассмотрим точку $o = [1 : 0 : \dots : 0] \in M(\mathbf{F})$. Тогда

- 1 Скалярное действие $\mathbb{C}^\times$ на W индуцирует действие $\mathbb{C}^\times$ на $M(\mathbf{F})$ эйлера типа в точке o ;
- 2 Действие W на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ может быть продолжено на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$;
- 3 Многообразие $M(\mathbf{F})$ эйлерово-симметричное;
- 4 Система фундаментальных форм $M(\mathbf{F})$ в o изоморфна $\mathbf{F}$.

1) Рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w] = [t : \lambda w]$$

и рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V_F$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w : f^2 : \dots : f^r] = [t : \lambda w : \lambda^2 f^2 : \dots : \lambda^r f^r].$$

1) Рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w] = [t : \lambda w]$$

и рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w : f^2 : \dots : f^r] = [t : \lambda w : \lambda^2 f^2 : \dots : \lambda^r f^r].$$

Тогда $\phi_{\mathbf{F}}(\lambda \circ [t : w]) = \lambda \circ \phi_{\mathbf{F}}([t : w])$. Поэтому $M(\mathbf{F})$ инвариантно относительно этого действия.

1) Рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w] = [t : \lambda w]$$

и рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w : f^2 : \dots : f^r] = [t : \lambda w : \lambda^2 f^2 : \dots : \lambda^r f^r].$$

Тогда $\phi_{\mathbf{F}}(\lambda \circ [t : w]) = \lambda \circ \phi_{\mathbf{F}}([t : w])$. Поэтому $M(\mathbf{F})$ инвариантно относительно этого действия. Легко видеть, что это действие эйлерова типа в точке o .

1) Рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w] = [t : \lambda w]$$

и рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w : f^2 : \dots : f^r] = [t : \lambda w : \lambda^2 f^2 : \dots : \lambda^r f^r].$$

Тогда $\phi_{\mathbf{F}}(\lambda \circ [t : w]) = \lambda \circ \phi_{\mathbf{F}}([t : w])$. Поэтому $M(\mathbf{F})$ инвариантно относительно этого действия. Легко видеть, что это действие эйлерова типа в точке o .

2) Можно явно предъявить действие W на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$.

1) Рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus W)$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w] = [t : \lambda w]$$

и рассмотрим действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$ по правилу

$$\lambda \circ [t : w : f^2 : \dots : f^r] = [t : \lambda w : \lambda^2 f^2 : \dots : \lambda^r f^r].$$

Тогда $\phi_{\mathbf{F}}(\lambda \circ [t : w]) = \lambda \circ \phi_{\mathbf{F}}([t : w])$. Поэтому $M(\mathbf{F})$ инвариантно относительно этого действия. Легко видеть, что это действие эйлерова типа в точке o .

2) Можно явно предъявить действие W на $\mathbb{P}V_{\mathbf{F}}$.

3) Так как o лежит в открытой орбите относительно действия W , то в любой точке этой орбиты есть действие эйлерова типа.

4) Следует из того, что в окрестности точки o многообразие $M(\mathbf{F})$ совпадает с графиком отображения $w \rightarrow (i_w^2, i_w^3, \dots, i_w^r)$.

4) Следует из того, что в окрестности точки o многообразие $M(\mathbf{F})$ совпадает с графиком отображения $w \rightarrow (i_w^2, i_w^3, \dots, i_w^r)$.

Таким образом существует биекция между классами изоморфных эйлерово-симметричных многообразий и классами изоморфных символьных систем.