Квазиаффинные сферические многообразия и их группы автоморфизмов

Боровик Виктория

11 ноября 2020

Напоминание

Везде мы работаем над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.

Определение

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа. Многообразие X с эффективным G-действием называется сферическим, если борелевская подгруппа действует на нем с открытой орбитой.

Предыдущие результаты

Теорема (Kraft, 2017)

Пусть X — связное аффинное многообразие. Если $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ как ind-группы, то $X \simeq \mathbb{A}^n$ как многообразия.

Предыдущие результаты

Теорема (Kraft, 2017)

Пусть X — связное аффинное многообразие. Если $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ как ind-группы, то $X \simeq \mathbb{A}^n$ как многообразия.

Теорема (Cantat, Regeta, Xie, 2019)

X — связное аффинное многообразие, $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ как абстрактные группы. Тогда $X \simeq \mathbb{A}^n$ как многообразия.

Предыдущие результаты

Теорема (Kraft, 2017)

Пусть X — связное аффинное многообразие. Если $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ как ind-группы, то $X \simeq \mathbb{A}^n$ как многообразия.

Теорема (Cantat, Regeta, Xie, 2019)

X — связное аффинное многообразие, $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ как абстрактные группы. Тогда $X \simeq \mathbb{A}^n$ как многообразия.

Теорема (Liendo, Regeta, Urech, 2019)

X — аффинное торическое многообразие, X отлично от тора. Y — нормальное аффинное многообразие. Тогда если $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(Y)$ как ind-группы, то $X \simeq Y$ как многообразия.

Подгруппа $H \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется *алгебраической подгруппой* $\mathrm{Aut}(X)$, если H имеет структуру алгебраической группы, т.ч. $H \times X \to X$ — регулярное действие алгебраической группы H на X.

Подгруппа $H \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется *алгебраической подгруппой* $\mathrm{Aut}(X)$, если H имеет структуру алгебраической группы, т.ч. $H \times X \to X$ — регулярное действие алгебраической группы H на X.

Определение

Скажем, что гомоморфизм групп $\theta : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$ сохраняет алгебраические подгруппы, если для каждой алгебраической подгруппы $H \subset \mathrm{Aut}(X)$ ее образ $\theta(H)$ — алгебраическая подгруппа в $\mathrm{Aut}(Y)$, и

$$\theta\big|_H : H \to \theta(H)$$

является гомоморфизмом алгебраических групп.

Основные результаты

Для формулировки основного результата нам понадобятся некоторые обозначения.

Пусть X — неприводимое G-многообразие, где G — связная алгебраическая группа с фиксированной борелевской подгруппой $B \subset G$.
Обозначим через $\mathfrak{X}(B)$ группу характеров B. Определим *весовой моноид* X:

$$\Lambda^+(X) = \{\lambda \in \mathfrak{X}(B) \mid \mathcal{O}(X)^{(B)}_\lambda \neq 0\},$$

где $\mathcal{O}(X)^{(B)}_\lambda \subset \mathcal{O}(X)$ — подпространство B-полуинвариантов веса λ.

Основные результаты

Главная теорема 1

Пусть X, Y — неприводимые нормальные квазиаффинные многообразия, $\theta : \mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(Y)$ — изоморфизм групп, сохраняющий алгебраические подгруппы. Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, B — ее фиксированная борелевская подгруппа. Если X — G-сферическое и не изоморфно тору, то:

(1) Y — G-сферическое для индуцированного θ G-действия;

(2) весовые моноиды $\Lambda^+(X)$ и $\Lambda^+(Y)$ совпадают;

(3) $X \simeq Y$, если выполняется одно из условий:

- X, Y гладкие и аффиные или
- X, Y аффинные и G — тор.

Для доказательства главной теоремы 1 авторы изучают обобщенные корневые подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$ и их веса для G-многообразия X.

Чтобы определить обобщенные корневые подгруппы, нам понадобится следующее определение.

Для доказательства главной теоремы 1 авторы изучают обобщенные корневые подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$ и их веса для G-многообразия X.
Чтобы определить обобщенные корневые подгруппы, нам понадобится следующее определение.

Определение

$\mathbb{G}_a$-действие на X называется H-однородным веса $\lambda \in \mathfrak{X}(H)$, если

$$h \circ \varepsilon(t) \circ h^{-1} = \varepsilon(\lambda(h) \cdot t) \quad \forall h \in H, \quad \forall t \in \mathbb{G}_a,$$

где гомоморфизм $\varepsilon : \mathbb{G}_a \to \mathrm{Aut}(X)$ индуцирован $\mathbb{G}_a$-действием.

Основные результаты

Определение

Однопараметрическая унипотентная подгруппа $U_0 \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется корневой подгруппой относительно H веса λ, если для некоторого изоморфизма $\mathbb{G}_a \simeq U_0$ индуцированное $\mathbb{G}_a$-действие H-однородное веса $\lambda \in \mathfrak{X}(H)$.

Основные результаты

Определение

Однопараметрическая унипотентная подгруппа $U_0 \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется корневой подгруппой относительно H веса λ, если для некоторого изоморфизма $\mathbb{G}_a \simeq U_0$ индуцированное $\mathbb{G}_a$-действие H-однородное веса $\lambda \in \mathfrak{X}(H)$.

Определение

Алгебраическая подгруппа $U_0 \subseteq \mathrm{Aut}(X)$, $U_0 \simeq \mathbb{G}_a^m$ называется обобщенной корневой подгруппой относительно H веса λ, если

$$h \circ \varepsilon(t) \circ h^{-1} = \varepsilon(\lambda(h) \cdot t) \quad \forall h \in H, \quad \forall t \in \mathbb{G}_a^m,$$

где $\mathbb{G}_a^m \simeq U_0$ — фиксированный изоморфизм.

Основные результаты

Замечание. Пусть X — H-многообразие. Тогда алгебраическая подгруппа $U_0 \subseteq \mathrm{Aut}(X)$, $U_0 \simeq \mathbb{G}_a^m$ для некоторого $m \geq 1$, является обобщенной корневой подгруппой относительно H тогда и только тогда, когда каждая ее одномерная замкнутая подгруппа — корневая подгруппа относительно H.

Лемма 1

X, Y — H-многообразия. Если $\theta : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$ — гомоморфизм, сохраняющий алгебраические подгруппы, т. ч. диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Aut}(X) \arrow[rr, "\theta"'] & & \mathrm{Aut}(Y) \end{tikzcd}$$

Тогда для любой корневой подгруппы $U_0 \subseteq Aut(X)$ образ $\theta(U_0)$ либо тривиален, либо является корневой подгруппой в $\mathrm{Aut}(Y)$ с таким же весом.

Доказательство.

Пусть $\theta(U_0)$ нетривиален. Тогда $\theta(U_0)$ — однопараметрическая унипотентная группа.

Пусть $\varepsilon : \mathbb{G}_a \simeq U_0, \lambda : H \to \mathbb{G}_m$ — вес U_0. Тогда $\forall t \in \mathbb{G}_a$

$$h \circ \theta(\varepsilon(t)) \circ h^{-1} = \theta(h \circ \varepsilon(t) \circ h^{-1}) = \theta(\varepsilon(\lambda(h) \cdot t)).$$

Получаем изоморфизм $\theta \circ \xi : \mathbb{G}_a \simeq \theta(U_0) \subseteq \mathrm{Aut}(Y)$, тогда λ — вес $\theta(U_0)$ относительно H. $\square$

Основные результаты

Для G-сферического многообразия X определим множество B-весов нетривиальных B-однородных $\mathbb{G}_a$-действий, где B — борелевская подгруппа в G.

$$D(X) = \left\{ \lambda \in \mathfrak{X}(B) \middle| \begin{array}{l} \exists \text{ нетривиальное } B\text{-однородное} \\ \mathbb{G}_a\text{-действие на } X \text{ веса } \lambda \end{array} \right\}$$

Основные результаты

Для G-сферического многообразия X определим множество B-весов нетривиальных B-однородных $\mathbb{G}_a$-действий, где B — борелевская подгруппа в G.

$$D(X) = \left\{ \lambda \in \mathfrak{X}(B) \middle| \begin{array}{l} \exists \text{ нетривиальное } B\text{-однородное} \\ \mathbb{G}_a\text{-действие на } X \text{ веса } \lambda \end{array} \right\}$$

Главная теорема 2

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, и X, Y — квазиаффинные G-сферические многообразия, такие что $D(X) = D(Y)$. Тогда $\Lambda^+(X) = \Lambda^+(Y)$.

Векторные поля

Возьмем некоторое многообразие X. За $\mathrm{Vec}(X)$ мы будем обозначать векторное пространство всех векторных полей на X (то есть, всех сечений касательного расслоения к X).

Векторные поля

Возьмем некоторое многообразие X. За $\mathrm{Vec}(X)$ мы будем обозначать векторное пространство всех векторных полей на X (то есть, всех сечений касательного расслоения к X).

Пусть теперь на X есть регулярное действие алгебраической группы H. Следующей формулой задается действие H на $\mathrm{Vec}(X)$.

$$(h \cdot \xi)(x) = \mathrm{d}\varphi_h(\xi(\varphi_{h^{-1}}(x))) \quad \forall x \in X,$$

где φ_h — автоморфизм X умножения на h.

Векторные поля

Зафиксируем характер $\lambda : H \to \mathbb{G}_m$. H *нормализует* векторное поле $\xi \in \mathrm{Vec}(X)$ *с весом* λ, если ξ — H-полуинвариант веса λ, т.е. для всех $h \in H$ диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "d\varphi_h"] & TX \\ X \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "\varphi_h"'] & X \arrow[u, "\lambda(h)\xi"'] \end{tikzcd}$$

Векторные поля

Зафиксируем характер $\lambda : H \to \mathbb{G}_m$. H *нормализует* векторное поле $\xi \in \mathrm{Vec}(X)$ *с весом* λ, если ξ — H-полуинвариант веса λ, т.е. для всех $h \in H$ диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "d\varphi_h"] & TX \\ X \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "\varphi_h"'] & X \arrow[u, "\lambda(h)\xi"'] \end{tikzcd}$$

Будем обозначать $\mathrm{Vec}(X)_{\lambda,H}$ — подпространство таких весов λ.

Покажем, что если борелевская подгруппа $B \subset G$ не тор, то неприводимое нормальное квазиаффинное многообразие с эффективным G-действием G-сферическое тогда и только тогда, когда размерности всех обобщенных корневых подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$ относительно B ограничены.

Покажем, что если борелевская подгруппа $B \subset G$ не тор, то неприводимое нормальное квазиаффинное многообразие с эффективным G-действием G-сферическое тогда и только тогда, когда размерности всех обобщенных корневых подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$ относительно B ограничены.

Предложение 1

Пусть связная разрешимая алгебраическая группа B эффективно действует на неприводимом квазиаффинном многообразии X, причем пусть B содержит унипотентные элементы. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) В X есть открытая B-орбита;

(2) $\exists C$, такая что $\dim \mathrm{Vec}(X)_\lambda \leq C$ для всех весов $\lambda \in \mathfrak{X}(B)$;

(3) $\exists C$, такая что $\dim U_0 \leq C$ для каждой обобщенной корневой подгруппы $U_0 \subseteq \mathrm{Aut}(X)$.

$(1) \Rightarrow (2)$

Зафиксируем $x_0 \in X$ — точку из открытой B-орбиты. Тогда существует инъекция из $\mathrm{Vec}(X)_\lambda$ в $T_{x_0}X$:

$$\xi \to \xi(x_0).$$

$(1) \Rightarrow (2)$

Зафиксируем $x_0 \in X$ — точку из открытой B-орбиты. Тогда существует инъекция из $\mathrm{Vec}(X)_\lambda$ в $T_{x_0}X$:

$$\xi \to \xi(x_0).$$

Действительно, пусть $\xi \in \mathrm{Vec}(X)_\lambda$. По определению для всех $b \in B$

$$\lambda(b)\xi(bx_0) = \mathrm{d}\varphi_b\,\xi(x_0).$$

Так как X неприводимо и x_0 из открытой орбиты, ξ однозначно определяется по $\xi(x_0)$.

$(1) \Rightarrow (2)$

Зафиксируем $x_0 \in X$ — точку из открытой B-орбиты. Тогда существует инъекция из $\mathrm{Vec}(X)_\lambda$ в $T_{x_0}X$:

$$\xi \to \xi(x_0).$$

Действительно, пусть $\xi \in \mathrm{Vec}(X)_\lambda$. По определению для всех $b \in B$

$$\lambda(b)\xi(bx_0) = \mathrm{d}\varphi_b\,\xi(x_0).$$

Так как X неприводимо и x_0 из открытой орбиты, ξ однозначно определяется по $\xi(x_0)$.

В частности, $\dim \mathrm{Vec}(X)_\lambda \leq \dim T_{x_0}X$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Нам потребуются вспомогательные утверждения.
Пусть алгебраическая группа D действует на многообразии X.
Тогда определено $\mathbb{K}$-линейное отображение

$$\operatorname{Lie} D \to \operatorname{Vec}(X), A \to \xi_A, \tag{1}$$

$$\xi_A : X \to TX, x \to (\mathrm{d}_e\mu_x)A \tag{2}$$

и $\mu_x : D \to X, d \to dx$ — орбитное отображение в x.
(2) задает морфизм, так как это композиция морфизмов

$$X \to T_eD \times TX, x \to (A, 0_x) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\mu|_{T_eD\times TX} : T_eD \times TX \to TX,$$

0_x — нулевой вектор в T_xX, $\mu : D \times X \to X$ — действие.

$(2) \Rightarrow (3)$

Нам потребуются вспомогательные утверждения.
Пусть алгебраическая группа D действует на многообразии X.
Тогда определено $\mathbb{K}$-линейное отображение

$$\operatorname{Lie} D \to \operatorname{Vec}(X), A \to \xi_A, \tag{1}$$

$$\xi_A : X \to TX, x \to (\mathrm{d}_e\mu_x)A \tag{2}$$

и $\mu_x : D \to X, d \to dx$ — орбитное отображение в x.
(2) задает морфизм, так как это композиция морфизмов

$$X \to T_eD \times TX, x \to (A, 0_x) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\mu|_{T_eD \times TX} : T_eD \times TX \to TX,$$

0_x — нулевой вектор в T_xX, $\mu : D \times X \to X$ — действие.

Лемма 1.1

D-действие эффективно, тогда $\mathbb{K}$-линейное отображение (1) инъективно.

$(2) \Rightarrow (3)$

Доказательство.

Для каждого $x \in X$ ядром $d_e\mu_x : \operatorname{Lie} D \to T_xX$ является $\operatorname{Lie} D_x$, где D_x — стабилизатор x в D.
Если $A \in \operatorname{Lie} D$, такая что $\xi_A = 0$, то $d_e\mu_x(A) = 0$ для всех $x \in X$, то есть $A \in \operatorname{Lie} D_x \quad \forall x \in X$. В силу эффективности действия $\{e\} = \bigcap\limits_{x \in X} D_x$, следовательно

$$\{0\} = \operatorname{Lie}(\bigcap_{x \in X} D_x) = \bigcap_{x \in X} \operatorname{Lie} D_x$$

$\Rightarrow A = 0. \quad \square$

$(2) \Rightarrow (3)$

Лемма 1.2

Пусть X — H-многообразие и ρ — H-однородное $\mathbb{G}_a$-действие веса $\lambda \in \mathfrak{X}(H)$. Тогда образ $\operatorname{Lie}\mathbb{G}_a \to \operatorname{Vec}(X)$, $A \to \xi_A$ лежит в $\operatorname{Vec}(X)_{\lambda,H}$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Лемма 1.2

Пусть X — H-многообразие и ρ — H-однородное $\mathbb{G}_a$-действие веса $\lambda \in \mathfrak{X}(H)$. Тогда образ $\operatorname{Lie}\mathbb{G}_a \to \operatorname{Vec}(X)$, $A \to \xi_A$ лежит в $\operatorname{Vec}(X)_{\lambda,H}$.

Доказательство.

Так как ρ H-однородное, то для каждых $x \in X$ и $h \in H$ диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_a \arrow[r, "t\to\lambda(h)t"] \arrow[d, "\mu_x"'] & \mathbb{G}_a \arrow[d, "\mu_{hx}"] \\ X \arrow[r, "\varphi_h"'] & X \end{tikzcd}$$

Возьмем дифференциалы отображений в $e \in \mathbb{G}_a$.

$$\forall A \in \operatorname{Lie} \mathbb{G}_a \quad \mathrm{d_x}\varphi_h \, \mathrm{d_e}\mu_x = \lambda(h) \, \mathrm{d_e}\mu_{hx}$$

Следовательно,

$$\forall A \in \operatorname{Lie} \mathbb{G}_a \quad h \cdot \xi_A(x) = \lambda(h)\xi_A(x),$$

то есть, ξ_A нормализуется H с весом λ. $\xi_A \in \operatorname{Vec}(X)_\lambda$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Пусть $U_0 \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ — обобщенная корневая подгруппа веса $\lambda \in \mathfrak{X}(B)$.

По Лемме 1.1 $\mathrm{Lie}\, U_0 \to \mathrm{Vec}(X), A \to \xi_A$ инъективно. Возьмем ненулевое $A \in \mathrm{Lie}\, U_0$. Существует однопараметрическая унипотентная подгруппа $U_{0,A} \subset U_0$, такая что $\mathrm{Lie}(U_{0,A})$ порождается A.

По определению $U_{0,A}$ — корневая подгруппа веса λ. Тогда по Лемме 1.2 $\xi_A \in \mathrm{Vec}(X)_\lambda$. Следовательно, весь образ $\mathrm{Lie}\, U_0 \to \mathrm{Vec}(X)$ лежит в $\mathrm{Vec}(X)_\lambda$.

Получаем, что $\dim U_0 \leq \dim \mathrm{Vec}(X)_\lambda$.

$(3) \Rightarrow (1)$

Предположим, что в X нет открытой B-орбиты. По теореме Розенлихта существует B-инвариантная непостоянная функция $f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$.

Утв. Для каждой B-полуинвариантной рациональной функции найдутся полуинвариантные регулярные функции $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$, такие что $f = f_1/f_2$.

$(3) \Rightarrow (1)$

Предположим, что в X нет открытой B-орбиты. По теореме Розенлихта существует B-инвариантная непостоянная функция $f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$.

Утв. Для каждой B-полуинвариантной рациональной функции найдутся полуинвариантные регулярные функции $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$, такие что $f = f_1/f_2$.

Так как f B-инвариантен, веса f_1 и f_2 совпадают. Положим $\lambda_0 \in \mathfrak{X}(B)$ — их вес.

$(3) \Rightarrow (1)$

Предположим, что в X нет открытой B-орбиты. По теореме Розенлихта существует B-инвариантная непостоянная функция $f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$.

Утв. Для каждой B-полуинвариантной рациональной функции найдутся полуинвариантные регулярные функции $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$, такие что $f = f_1/f_2$.

Так как f B-инвариантен, веса f_1 и f_2 совпадают. Положим $\lambda_0 \in \mathfrak{X}(B)$ — их вес.

Кроме того, для любого однородного многочлена p от двух переменных выполняется $p(f_1, f_2) \neq 0$.
Действительно, пусть $\exists m > 0$ и ненулевой набор $(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$, такой что

$$\sum_{i=0}^{m} a_i (f_1)^i (f_2)^{m-i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i f^i = 0,$$

$(3) \Rightarrow (1)$

B содержит унипотенты, следовательно, центр унипотентного радикала в B нетривиален.
Пусть $\rho : \mathbb{G}_a \times X \to X$ — $\mathbb{G}_a$-действие, соответствующее одномерной подгруппе в этом центре. Тогда ρ является B-однородным с некоторым весом $\lambda_1 \in \mathfrak{X}(B)$.
Для любого $m \geq 0$ определим эффективное $\mathbb{G}_a^{m+1}$-действие на X

$$\mathbb{G}_a^{m+1} \times X \to X, \quad ((t_0, \dots, t_m), x) \to \rho\left(\sum_{i=0}^{m} t_i (f_1^i \cdot f_2^{m-i})(x), x\right),$$

соответствующая U_0 в $\mathrm{Aut}(X)$ будет обобщенной корневой подгруппой веса $\lambda_1 + m\lambda_0 \in \mathfrak{X}(B)$.

Лемма 2

Пусть X — квазиаффинное T-торическое многообразие и $X \not\cong T$. Тогда $\exists$ нетривиальное T-однородное $\mathbb{G}_a$-действие и подтор $T' \subset T$ коразмерности 1, такой что $\mathbb{G}_a \rtimes T'$ действует на X с открытой орбитой.

Лемма 3

G — связная редуктивная группа, $B \subset G$ — борелевская подгруппа. Если G не тор, то в B есть нетривиальные унипотентные элементы.

Главная теорема 1(1)

Теорема

Пусть G — связная редуктивная группа и X, Y — неприводимые квазиаффинные нормальные многообразия. Пусть $\theta : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$ — изоморфизм, сохраняющий алгебраические подгруппы. Если X не изоморфно тору и G-сферическое, то Y G-сферическое для G-действия, индуцированного θ.

Главная теорема 1(1)

Теорема

Пусть G — связная редуктивная группа и X, Y — неприводимые квазиаффинные нормальные многообразия. Пусть $\theta : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$ — изоморфизм, сохраняющий алгебраические подгруппы. Если X не изоморфно тору и G-сферическое, то Y G-сферическое для G-действия, индуцированного θ.

Доказательство. Пусть $B \subseteq G$ — борелевская подгруппа, $T \subseteq G$ — максимальный тор. Рассмотрим 2 случая:

$G \neq T$: По лемме 3 в B есть унипотентные элементы, следовательно, по предложению 1 получаем ограниченность размерности каждой $U_0 \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ — обобщенной корневой подгруппы относительно B.

Главная теорема 1(1)

По лемме 1 имеется биективное соответствие между обобщенными корневыми подгруппами $U_0 \in \mathrm{Aut}(X)$ и обобщенными корневыми подгруппами $\theta(U_0) \in \mathrm{Aut}(Y)$.

Следовательно, по предложению 1 многообразие Y $\theta(G)$-сферическое.

Главная теорема 1(1)

По лемме 1 имеется биективное соответствие между обобщенными корневыми подгруппами $U_0 \in \mathrm{Aut}(X)$ и обобщенными корневыми подгруппами $\theta(U_0) \in \mathrm{Aut}(Y)$.

Следовательно, по предложению 1 многообразие Y $\theta(G)$-сферическое.

$G = T$: Тогда X — T-торическое. X не изоморфно тору, следовательно, по лемме 2 $\exists T' \subseteq T$ — подтор коразмерности 1 и корневая подгруппа V относительно T, т.ч. $V \cdot T'$ имеет открытую орбиту в X.

Главная теорема 1(1)

Тогда $\theta(V) \cdot \theta(T')$ действует с открытой орбитой на Y.

$$\dim(Y) \leq \dim(V) + \dim(T') = \dim(T).$$

Главная теорема 1(1)

Тогда $\theta(V) \cdot \theta(T')$ действует с открытой орбитой на Y.

$$\dim(Y) \leq \dim(V) + \dim(T') = \dim(T).$$

С другой стороны, $\theta(T)$ действует эффективно на Y, тогда $\dim(T) \leq \dim(Y)$. В итоге, $\dim(Y) = \dim(T)$, и Y — $\theta(T)$-торическое.