Рациональные комплексные многообразия, имеющие бесконечное число вещественных форм

Билич Борис

Факультет математики
НИУ ВШЭ

28 октября 2020 г.

Содержание

Содержание

Вещественные и комплексные многообразия

Вещественные многообразия $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ и $\mathcal{D} = \{uv + z^2 = 1\}$ неизоморфны, но их комплексификации изоморфны ($u = x + iy$, $v = x - iy$).

Вещественные и комплексные многообразия

Вещественные многообразия $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ и $\mathcal{D} = \{uv + z^2 = 1\}$ неизоморфны, но их комплексификации изоморфны ($u = x + iy$, $v = x - iy$).
Пусть X – комплексное многообразие и $f \colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ – канонические отображение. Обозначим через $\tau \colon \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ морфизм $\mathbb{R}$-схем, соответствующий комплексному сопряжению.

Вещественные и комплексные многообразия

Вещественные многообразия $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ и $\mathcal{D} = \{uv + z^2 = 1\}$ неизоморфны, но их комплексификации изоморфны ($u = x + iy$, $v = x - iy$).
Пусть X – комплексное многообразие и $f\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ – канонические отображение. Обозначим через $\tau\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ морфизм $\mathbb{R}$-схем, соответствующий комплексному сопряжению.

Определение

$\overline{X}$ будет обозначать $\mathbb{C}$-схему, изоморфную X как $\mathbb{R}$-схема, но с отображением $\overline{f} = \tau \circ f\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.

Заметим, что X всегда изоморфно $\overline{X}$, но как правило, не существует канонического изоморфизма.

Вещественные структуры

Определение

Вещественной структурой называется изоморфизм $\sigma\colon X \to \overline{X}$, являющийся инволюцией как автоморфизм $\mathbb{R}$-схемы. Вещественные структуры называются эквивалентными, если они сопряжены автоморфизмом комплексного многообразия.

Лемма

Категории вещественных многообразий и комплексных многообразий с вещественной структурой эквивалентны.

Вещественные структуры

Определение

Вещественной структурой называется изоморфизм $\sigma\colon X \to \overline{X}$, являющийся инволюцией как автоморфизм $\mathbb{R}$-схемы. Вещественные структуры называются эквивалентными, если они сопряжены автоморфизмом комплексного многообразия.

Лемма

Категории вещественных многообразий и комплексных многообразий с вещественной структурой эквивалентны.

Доказательство.

Если Y – вещественное многообразие, то $Y_{\mathbb{C}} = Y \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{R})} \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ обладает комплексной структурой $1 \times \tau$. Если (X, σ) – комплексное многообразие, то фактор X/σ существует в категории $\mathbb{R}$-схем и изоморфен некоторому многообразию. $\square$

Вещественные формы

Вещественное многообразие Y называется вещественной формой комплексногоо многообразия X, если $X \cong Y_{\mathbb{C}}$. Лемма на предыдущем слайде говорит нам о том, что вещественные формы X находятся в естественном взаимно-однозначном соответсвии с классами эквивалентных вещественных структур на X.

Вещественные формы

Вещественное многообразие Y называется вещественной формой комплексногоо многообразия X, если $X \cong Y_{\mathbb{C}}$. Лемма на предыдущем слайде говорит нам о том, что вещественные формы X находятся в естественном взаимно-однозначном соответсвии с классами эквивалентных вещественных структур на X.
Теперь мы готовы сформулировать два главных результата.

Теорема

Многообразие $V = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ имеет бесконечное число вещественных форм.

Вещественные формы

Вещественное многообразие Y называется вещественной формой комплексногоо многообразия X, если $X \cong Y_{\mathbb{C}}$. Лемма на предыдущем слайде говорит нам о том, что вещественные формы X находятся в естественном взаимно-однозначном соответсвии с классами эквивалентных вещественных структур на X.
Теперь мы готовы сформулировать два главных результата.

Теорема

Многообразие $V = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ имеет бесконечное число вещественных форм.

Теорема

Для любого $n > 0$, существует многообразие X_n размерности n такое, что $V \times X_n$ имеет бесконечное число вещественных форм.

Овеществление расслоений

Как имея комплексное расслоение E ранга r на $Y_{\mathbb{C}}$ получить вещественное расслоение $E_{\mathbb{R}}$ ранга $2r$ на X?
Для этого рассмотрим расслоение ранга $E \oplus \overline{E}$ и продолжим вещественную структуру посредством перестановки слагаемых.

Пример

Рассмотрим расслоение

$$L_n = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}.$$

Его овеществление изоморфно, как топологическое векторное расслоение, двумерному расслоению на сфере с характеристическим числом n (или $\mathcal{O}(n) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

Содержание

2-сфера как алгебраическое многообразие

Определим сферу $\mathbb{S}^2$ как аффинное многообразие, заданное уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2-сфера как алгебраическое многообразие

Определим сферу $\mathbb{S}^2$ как аффинное многообразие, заданное уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Определим также проективную квадрику $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, заданную уравнением $X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0$. Заметим, что $\mathbb{S}^2 = \mathbb{Q}^2 \setminus \{T = 0\}$.

$$\mathbb{Q}^2_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}.$$

2-сфера как алгебраическое многообразие

Определим сферу $\mathbb{S}^2$ как аффинное многообразие, заданное уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Определим также проективную квадрику $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, заданную уравнением $X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0$. Заметим, что $\mathbb{S}^2 = \mathbb{Q}^2 \setminus \{T = 0\}$.

$$\mathbb{Q}^2_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}.$$

При этом $\mathbb{Q}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2(\mathbb{R}) = S^2$ (вещественные точки в классической топологии).

2-сфера как алгебраическое многообразие

Определим сферу $\mathbb{S}^2$ как аффинное многообразие, заданное уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Определим также проективную квадрику $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, заданную уравнением $X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0$. Заметим, что $\mathbb{S}^2 = \mathbb{Q}^2 \setminus \{T = 0\}$.

$$\mathbb{Q}^2_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}.$$

При этом $\mathbb{Q}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2(\mathbb{R}) = S^2$ (вещественные точки в классической топологии).

Теорема

Каждое топологическое векторное расслоение на S^2 имеет алгебраическую модель на $\mathbb{S}^2$.

Топологические векторные расслоения на сфере

Вещественные раслоения ранга r на сфере находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с группой

$$\pi_1(\mathrm{GL}_r^+(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0, & r = 1 \\ \mathbb{Z}, & r = 2 \\ \mathbb{Z}_2, & r > 2. \end{cases}$$

Двумерные расслоения обозначаются $\mathcal{O}(n)$. Нетривиальное расслоение ранга > 2 изоморфно сумме $\mathcal{O}(1)$ и тривиального.

Топологические векторные расслоения на сфере

Вещественные раслоения ранга r на сфере находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с группой

$$\pi_1(\mathrm{GL}_r^+(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0, & r = 1 \\ \mathbb{Z}, & r = 2 \\ \mathbb{Z}_2, & r > 2. \end{cases}$$

Двумерные расслоения обозначаются $\mathcal{O}(n)$. Нетривиальное расслоение ранга > 2 изоморфно сумме $\mathcal{O}(1)$ и тривиального. Расслоение $\mathcal{O}(n)$ также имеет алгебраическую модель, как копмплексное расслоение ранга один — поверхность Хирцебруха.

Алгебраическая модель расслоений

Рассмотрим расслоение, которое было опредлено ранее.

$$L_n = \Sigma_n \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$$

Алгебраическая модель расслоений

Рассмотрим расслоение, которое было опредлено ранее.

$$L_n = \Sigma_n \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$$

Лемма

1. *Комплексификация* $(L_{n,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ *изоморфна* $\mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \oplus \overline{\mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}(n)}$.
2. *Топологическое векторное расслоение* $L_{n,\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{Q}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^2(\mathbb{R})$ *изоморфно расслоению с характеристическим числом* n.

Доказательство.

Диагональ в $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ диффеоморфна $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ и по совместительству множеству вещественных точек $\mathbb{S}^2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & S^2 \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dd, bend left=60, "\cong"] \\
L_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\
\mathcal{O}(n) \arrow[r] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Содержание

Доказательство главного результата

Будем обозначать ограничение $L_{n,\mathbb{R}} \to \mathbb{Q}^2$ как $q_n : V_n \to \mathbb{S}^2$. В таком случае $V_0 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Теорема (Эквивалент главной теоремы)

Для любого $n \geq 0$ вещественные алгебраические многообразия V_n являются попарно не-изоморфными вещественными формами многообразия $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Доказательство главного результата

Будем обозначать ограничение $L_{n,\mathbb{R}} \to \mathbb{Q}^2$ как $q_n : V_n \to \mathbb{S}^2$. В таком случае $V_0 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Теорема (Эквивалент главной теоремы)

Для любого $n \geq 0$ вещественные алгебраические многообразия V_n являются попарно не-изоморфными вещественными формами многообразия $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Доказательсво разобьем на две леммы.

Лемма (Совпадение комплексификаций)

Для любого $n \geq 0$ комплексификация $q_{n,\mathbb{C}} : V_{n,\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}$ изоморфна тривиальному расслоению.

Лемма (Неизоморфность многообразий)

Для различных $n, m \geq 0$ алгебраические многообразия V_n и V_m не-изоморфны.

Совпадение комплексификаций

Вспомним, что $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{Q}^2$ и соответственно

$$\begin{tikzcd}
V_{n,\mathbb{C}} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & (L_{n,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \oplus \overline{\mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}(n)} \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] & \mathbb{Q}^2_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}.$$

Совпадение комплексификаций

Вспомним, что $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{Q}^2$ и соответственно

$$\begin{tikzcd}
V_{n,\mathbb{C}} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & (L_{n,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \oplus \overline{\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}(n)} \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] & \mathbb{Q}^2_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}.$$

Также есть изоморфизм $(L_{n,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \otimes \overline{\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}(n)} \oplus \mathbb{C}$ (диагональ плюс анти-диагональ).
Дивизор, соответствующий $\operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \otimes \overline{\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}(n)}$ имеет носитель $\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{S}^2$.

Совпадение комплексификаций

Вспомним, что $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{Q}^2$ и соответственно

$$\begin{tikzcd} V_{n,\mathbb{C}} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & (L_{n,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \oplus \overline{\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}(n)} \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] & \mathbb{Q}^2_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}.$$

Также есть изоморфизм $(L_{n,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \otimes \overline{\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}(n)} \oplus \mathbb{C}$ (диагональ плюс анти-диагональ).
Дивизор, соответствующий $\operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \otimes \overline{\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}(n)}$ имеет носитель $\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{S}^2$. Автор также строит более явную конструкцию, о ней чуть позже.

Неизоморфность многообразий

Достаточно доказать неизоморфность топологических пространств $V_n(\mathbb{R})$ и $V_m(\mathbb{R})$. Это классический результат в алгебраической топологии.

Неизоморфность многообразий

Достаточно доказать неизоморфность топологических пространств $V_n(\mathbb{R})$ и $V_m(\mathbb{R})$. Это классический результат в алгебраической топологии.

Рассмотри сферическое подрасслоение $S^1(V_{m,n})$ состоящее из векторов равных 1 по модулю. Когомологии этого расслоения изоморфны когомологиям исходного в бесконечности. Рассчитать когомологии можно из спектральной последовательности, которая превращается в точную последовательность Гизина.

$$\to H^d(S^1(V_n)) \to H^{d-1}(S^2) \xrightarrow{\cdot n} H^{d+1}(S^2) \to H^{d+1}(S^1(V_n)) \to$$

Неизоморфность многообразий

Достаточно доказать неизоморфность топологических пространств $V_n(\mathbb{R})$ и $V_m(\mathbb{R})$. Это классический результат в алгебраической топологии.
Рассмотри сферическое подрасслоение $S^1(V_{m,n})$ состоящее из векторов равных 1 по модулю. Когомологии этого расслоения изоморфны когомологиям исходного в бесконечности. Рассчитать когомологии можно из спектральной последовательности, которая превращается в точную последовательность Гизина.

$$\to H^d(S^1(V_n)) \to H^{d-1}(S^2) \xrightarrow{\cdot n} H^{d+1}(S^2) \to H^{d+1}(S^1(V_n)) \to$$

Мы получаем, что $H^2(S^1(V_n)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Содержание

Вещественные структуры в явном виде

Автор явно строит вещественную структуру на $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, из которой получаются многообразия V_n. Каноническая вещественная структура будет обозначаться Σ_0. Пусть x, y, z – кординаты на $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}$, такие что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Вещественные структуры в явном виде

Автор явно строит вещественную структуру на $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, из которой получаются многообразия V_n. Каноническая вещественная структура будет обозначаться Σ_0. Пусть x, y, z – кординаты на $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}$, такие что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Пусть $P_n(z), Q_n(z)$ – многочлены, такие что $(1+z)^n P_n(z) + (1-z)^n Q_n(z) = 1$. Рассмотрим матрицу

$$A_n = \begin{pmatrix} (x-iy)^n(P_n + Q_n) & (1-z)^n - (1+z)^n \\ -(1+z)^n P_n^2 + (1-z)^n Q_n^2 & -(x+iy)^n(P_n + Q_n) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица определяет морфизм тривиального расслоения j_n и положив $\Sigma_n = (j_n \circ \Sigma_0)$ мы получаем некоторую вещественную структуру.

n=1

$$A_1 = \begin{pmatrix} (x-iy) & -2z \\ -z/2 & -x-iy \end{pmatrix}, (\Sigma_1)_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} x & -y & -2z & 0 \\ -y & -x & 0 & 2z \\ -\frac{z}{2} & 0 & -x & -y \\ 0 & \frac{z}{2} & -y & x \end{pmatrix}$$

Собственные неподвижные векторные поля: $(-2y, 2(1-x), 0, z)$, $(-2(1+x), 2y, z, 0)$. Определяет тривиализацию на $\{x \neq \pm 1\}$.

Задача

Показать, что подрасслоение, состоящее из неподвижных векторов матрицы $(\Sigma_1)_{\mathbb{R}}$ является расслоению с характеристическим числом 1.