

Основы теории открытых квантовых систем II.
Лекция 3. Динамика гауссовских состояний.
Решение уравнений для средних и матриц
ковариаций

Теретёнков Александр Евгеньевич

21 февраля 2023 г.

В прошлой лекции...

Определение. Состояние ρ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция $\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \mathbf{a}})$ представима в виде экспоненты от квадратичных и линейных форм по $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{z} \equiv (z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)^T$$

Матрицы плотности могут быть однозначно охарактеризованы посредством характеристических функций.

$$\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T C \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$

$$\chi_N(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2} \mathbf{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2} \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T (C + \frac{1}{2}E) \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$

$$\chi_A(\mathbf{z}) \equiv \text{tr}(\rho e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2} \mathbf{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2} \mathbf{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T (C - \frac{1}{2}E) \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}.$$

Гауссовские состояния

Смешанные состояния:

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a} + s},$$

$$K = K^T = \tilde{K}, \quad KE < 0, \quad g = \tilde{g}, \quad e^s = \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|} e^{\frac{1}{2}g^T \frac{1}{K}g}$$

Утверждение.

$$m = -K^{-1}g, \quad D = J \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}}, \quad C = -\frac{J}{2} \operatorname{cth} \frac{KJ}{2}$$

Прямая подстановка

Утверждение. $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + s_t}$ удовлетворяет

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t, \Gamma_t, f_t}(\rho_t), \quad \rho_t|_{t=t_0} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_0 \mathbf{a} + g_0^T \mathbf{a} + s_0},$$

$$K_0 = K_0^T = \tilde{K}_0, K_0 E < 0, g_0 = \tilde{g}_0,$$

если матрица K_t определяется (однозначно при условии $K_t = K_t^T = \tilde{K}_t$) из уравнения $D_t(e^{-K_t J} - I) = J$, а матрица D_t в свою очередь удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_t = & J \left(iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t) \right) D_t + \\ & + D_t \left(-iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t) \right) J + J\Gamma_t^T J, \end{aligned}$$

Прямая подстановка

g_t определяется из линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{K_t J} g_t \right) = \left(i H_t + \frac{1}{2} (\Gamma_t^T - \Gamma_t) \right) J \frac{1}{K_t J} g_t - i f_t,$$

а эволюция скалярного коэффициента s_t определяется формулой

$$s_t = s_0 + \frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} g_t - \frac{1}{2} g_0^T J \frac{1}{K_0 J} g_0 - \ln \frac{\sqrt{|\det(e^{K_0 J} - I)|}}{\sqrt{|\det(e^{K_t J} - I)|}},$$

Прямая подстановка

Идея доказательства.

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t \rho_t^{-1} = & \mathbf{a}^T \left(-iH_t - \frac{1}{2}\Gamma^T \right) \mathbf{a} - i\mathbf{a}^T f_t + \\ & + \rho_t \left(\mathbf{a}^T \left(iH_t - \frac{1}{2}\Gamma_t^T \right) \mathbf{a} + i\mathbf{a}^T f_t \right) \rho_t^{-1} + \mathbf{a}^T \Gamma_t \rho_t \mathbf{a} \rho_t^{-1}.\end{aligned}$$

Симметризуем квадратичные формы. Подставляем $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + s_t}$. Приравнивая отдельно квадратичные, линейные формы и скаляры. □

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Пусть $\rho(\mathbf{z})$ — нормальный символ ρ , тогда:

$$(\mathfrak{a}\rho)(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{z} + \frac{E - J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \rho(\mathbf{z}),$$

$$(\rho\mathfrak{a})(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{z} + \frac{E + J}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \rho(\mathbf{z}).$$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Нормальный символ $\rho_t(\mathbf{z})$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_t(\mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho_t(\mathbf{z}) - \mathbf{z}^T B_t^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho_t(\mathbf{z}) + \\ & + i f_t^T J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rho_t(\mathbf{z}) - (\text{Tr } B_t) \rho_t(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

где

$$Q_t = J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J - \frac{E}{2} \left(-i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J - J \left(i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) \frac{E}{2},$$

$$B_t^T = \left(-i H_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J.$$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Если в начальный момент нормальный символ равен $\rho_0(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_0 \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_0 + r_0}$, то решение уравнения для нормального символа имеет вид $\rho_t(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}$, где коэффициенты R_t , q_t , r_t удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{R}_t = -B_t^T R_t - R_t B_t + R_t Q_t R_t,$$

$$\dot{q}_t = (R_t Q_t - B_t^T) q_t - i R_t J f_t,$$

$$\dot{r}_t = \frac{1}{2} \text{Tr}(Q_t R_t) - \text{Tr} B_t + \frac{1}{2} q_t^T Q_t q_t + i f_t^T J q_t.$$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Если в начальный момент нормальный символ равен $\rho_0(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_0 \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_0 + r_0}$, то решение уравнения для нормального символа имеет вид $\rho_t(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}$, где коэффициенты R_t, q_t, r_t удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{R}_t = -B_t^T R_t - R_t B_t + R_t Q_t R_t,$$

$$\dot{q}_t = (R_t Q_t - B_t^T) q_t - i R_t J f_t,$$

$$\dot{r}_t = \frac{1}{2} \text{Tr}(Q_t R_t) - \text{Tr} B_t + \frac{1}{2} q_t^T Q_t q_t + i f_t^T J q_t.$$

Замечание. Подстановка $C_t = -E/2 - R_t^{-1}$, $m_t = -R_t^{-1} q_t$ сводит первую пару уравнений к уравнениям для матрицы ковариаций и первых моментов.

Решение уравнений для средних и матриц ковариаций

Пусть $|V\rangle\rangle$ — элементы матрицы V , построчно выстроенные в один вектор, тогда

$$\frac{d}{dt}|C_t\rangle\rangle = (B_t \otimes I + I \otimes B_t)|C_t\rangle\rangle + \left| J \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} J \right\rangle\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}|D_t\rangle\rangle = (B_t \otimes I + I \otimes B_t)|D_t\rangle\rangle + |J\Gamma_t^T J\rangle\rangle.$$

где $B_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right).$

Решение уравнений для средних и матриц ковариаций

Утверждение. Пусть G_t — решение задачи Коши

$$\dot{G}_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) G_t, \quad G_0 = I.$$

Тогда:

$$m_t = G_t m_0 + i \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J f_{t'} dt',$$

$$D_t = G_t D_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt',$$

$$C_t = G_t C_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \frac{\Gamma_{t'} + \Gamma_{t'}^T}{2} J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt'.$$

Решение уравнений для средних и матриц ковариаций

Утверждение. Пусть G_t — решение задачи Коши

$$\dot{G}_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) G_t, \quad G_0 = I.$$

Тогда:

$$m_t = G_t m_0 + i \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J f_{t'} dt',$$

$$D_t = G_t D_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma_{t'}^T J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt',$$

$$C_t = G_t C_0 G_t^T + \int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \frac{\Gamma_{t'} + \Gamma_{t'}^T}{2} J (G_t G_{t'}^{-1})^T dt'.$$

Решение уравнений для средних и матриц ковариаций

Утверждение. Эволюция среднего определяется формулой

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) & iJf_t \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D_t может быть определена по формуле $D_t = X_t Y_t^{-1}$, где матрицы X_t и Y_t могут быть получены из следующего матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) & J\Gamma_t^T J \\ 0 & \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

с произвольным начальным условием, таким, что $X_0 Y_0^{-1} = D_0$. В частности, можно положить $X_0 = D_0, Y_0 = I$.

Решение уравнений для средних и матриц ковариаций

Замечание. В общем случае решения матричного уравнения Риккати

$$\frac{d}{dt}Z(t) = A(t)Z(t) + B(t) - Z(t)C(t)Z(t) - Z(t)D(t)$$

связано с решением системы

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

равенством $X(t) = Z(t)Y(t)$.

Решение уравнений для средних и матриц ковариаций

Утверждение. Пусть m^{st} и C^{st} — решения уравнений

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) C^{st} + C^{st} \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + J \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} J = 0,$$

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) m^{st} + iJf = 0,$$

такие, что $C^{st} = (C^{st})^T = \tilde{C}^{st}$ и $m^{st} = \tilde{m}^{st}$, тогда

$$m_t = e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} (m_0 - m^{st}) + m^{st},$$

$$C_t = e^{J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) t} (C_0 - C^{st}) e^{\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J t} + C^{st}.$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0, \gamma_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Явно выпишем генератор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) = & -i \left[\omega_0 a^\dagger a, \rho \right] + \gamma_1 \left(a \rho a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho - \frac{1}{2} \rho a^\dagger a \right) + \\ & + \gamma_2 \left(a^\dagger \rho a - \frac{1}{2} a a^\dagger \rho - \frac{1}{2} \rho a a^\dagger \right) \end{aligned}$$

В первую очередь будем иметь ввиду

$$\gamma_1 = \gamma_0(N+1), \quad \gamma_2 = \gamma_0 N, \quad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0, \gamma_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Явно выпишем генератор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) = & -i \left[\omega_0 a^\dagger a, \rho \right] + \gamma_1 \left(a \rho a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho - \frac{1}{2} \rho a^\dagger a \right) + \\ & + \gamma_2 \left(a^\dagger \rho a - \frac{1}{2} a a^\dagger \rho - \frac{1}{2} \rho a a^\dagger \right) \end{aligned}$$

В первую очередь будем иметь ввиду

$$\gamma_1 = \gamma_0(N+1), \quad \gamma_2 = \gamma_0 N, \quad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

Вычислим

$$J\Gamma^T J = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0 \end{pmatrix}.$$

$$G_t = \begin{pmatrix} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle a \rangle_t \\ \langle a^\dagger \rangle_t \end{pmatrix} = m_t = \begin{pmatrix} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} \langle a \rangle_0 \\ e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \langle a^\dagger \rangle_0 \end{pmatrix}$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$\int_0^t G_t G_{t'}^{-1} J \Gamma^T J (G_{t'}^{-1})^T G_t^T dt' = \int_0^t G_{t-t'} J \Gamma^T J G_{t-t'}^T dt'$$

$$\begin{aligned} G_t J \Gamma^T J G_t^T &= \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \end{pmatrix} = \\ &= e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\int_0^t G_{t-t'} J \Gamma^T J G_{t-t'}^T dt' = \begin{cases} \frac{1 - e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t}}{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_1 \neq \gamma_2 \\ t \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} & \gamma_1 = \gamma_2 \end{cases}$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$\begin{aligned}
 G_t D_0 G_t^T &= \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \end{pmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} \langle a^2 \rangle_0 & \langle a a^\dagger \rangle_0 \\ \langle a^\dagger a \rangle_0 & \langle (a^\dagger)^2 \rangle_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} & 0 \\ 0 & e^{-\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \langle a^2 \rangle_0 e^{-2\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} & \langle a a^\dagger \rangle_0 e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t} \\ \langle a^\dagger a \rangle_0 e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t} & \langle (a^\dagger)^2 \rangle_0 e^{-2\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - i\omega_0\right)t} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$\gamma_1 \neq \gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} \langle a^2 \rangle_t & \langle aa^\dagger \rangle_t \\ \langle a^\dagger a \rangle_t & \langle (a^\dagger)^2 \rangle_t \end{pmatrix} = e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t} \begin{pmatrix} \langle a^2 \rangle_0 e^{-2i\omega_0 t} & \langle aa^\dagger \rangle_0 \\ \langle a^\dagger a \rangle_0 & \langle (a^\dagger)^2 \rangle_0 e^{2i\omega_0 t} \end{pmatrix} + \frac{1 - e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t}}{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle a^2 \rangle_t = e^{-2\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + i\omega_0\right)t} \langle a^2 \rangle_0, \quad (a^2(t) = (a(t))^2)$$

$$\langle a^\dagger a \rangle_t = e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t} \langle a^\dagger a \rangle_0 + \frac{1 - e^{-(\gamma_1 - \gamma_2)t}}{\gamma_1 - \gamma_2} \gamma_1$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_0, \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = N$$

$$\langle a \rangle_t = e^{-\left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)t} \langle a \rangle_0$$

$$\langle a^2 \rangle_t = e^{-2\left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)t} \langle a^2 \rangle_0$$

$$\langle a^\dagger a \rangle_t = e^{-\gamma_0 t} \langle a^\dagger a \rangle_0 + (1 - e^{-\gamma_0 t})N$$

То есть при $\gamma_1 > \gamma_2$ осциллятор приходит в равновесие со средой. ($\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = e^{\beta\omega_0}$)

При $\gamma_1 < \gamma_2$ происходит экспоненциальный рост это соответствует отрицательной температуре, то есть инвертированно заселённому резервуару, поэтому говорят о некогерентной накачке.

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

В случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, получим

$$\langle a \rangle_t = e^{-i\omega_0 t} \langle a \rangle_0$$

$$\langle a^2 \rangle_t = e^{-2i\omega_0 t} \langle a^2 \rangle_0$$

$$\langle a^\dagger a \rangle_t = \langle a^\dagger a \rangle_0 + \gamma t$$

(Нет затухания первых моментов и линейно растут интенсивности.)

Напомним, что в общем случае $\Gamma = \Gamma^T$ соответствует

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\hat{H}, \rho] - \frac{1}{2} \sum_i [\hat{C}^{(i)}, [\hat{C}^{(i)}, \rho]],$$

которое возникает при усреднении по классическому Винеровскому процессу.

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

Упражнение. (Динамика в сжатом температурном резервуаре)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \delta & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \bar{\delta} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{1,2} \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{C}.$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = 0.$$