

Мы будем иметь такие C.D.C.:

Пусть M — сепараб. банахово пространство,
и $\xi: \Omega \rightarrow M$ — с.в., $D\xi = \mu_\xi \in \mathcal{P}(M)$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые с.в., μ_{ξ_i} — предельные μ_{ξ} , т.е. $D\xi_j = \mu_{\xi_j} \forall j$.

Положим $F_j^W(x) = F(x) + \xi_j^W$,

и определим C.D.C.:

- (1) $x_{n+1}^W = F_n^W(x_n^W) = F(x_n^W) + \xi_n^W, n \geq 0$
 (2) $x_0 = y \in M$

Условие $\{x_n(y), n \geq 0\}$ — решение задачи (1), (2).

Здесь или

- а) y не случайно,
 б) или y — с.в. в M , независимая от всех ξ_j .

Это — типичная задача

- а) — случайный случай б)!
- $\mu_n = D(x_n^W) \in \mathcal{P}(M), \mu_n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(x_n \in \mathbb{R})$

Задача — изучение предельного пер. μ_n .

Задача? Тем, кто использует центральную теорему, нужно знать

(1), нужно следующее. Для $f: M \rightarrow \mathbb{R}, f \in C(M)$, $\mathbb{E} f(x_n) \rightarrow \int f(x) \mu_n(dx)$ (если μ_n — μ_{ξ_n}), и $D f(x_n) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. (Нужно существование), и $D f(x_n) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. (Нужно)

Лемма 1.1, $\mathbb{E} f(x_n) = \int f(x) \mu_n(dx)$

(«задача перемещения в пространстве»)

Лемма 1.2. $D(f(x_n)) = f \circ \mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Задача 1.5

Доказать Лемму 1.2

Дополнительно

По построению, x_n^w — заданное в
 $(v, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Но ξ_n не задано в этом с.в.

Лемма 1. В (1), с.в. ξ_n^w не задано
 в $F(x_n^w)$.

Задача 1. Докажем это (выход из
 того, что ξ_n не задано в $v, \xi_1, \dots, \xi_n$;
 см. [W]).

Задача 2. Переписать основное с.в.
 независимых с.в. Известны примеры зависи-
 мых с.в. $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, таких что
 $\mathbb{E} \xi \eta = \mathbb{E} \xi \mathbb{E} \eta$.

Факт: а) Если $\mathbb{E} f(\xi) g(\eta) = \mathbb{E} f(\xi) \mathbb{E} g(\eta)$
 $\forall f, g \in C_b(\mathbb{R})$, то ξ, η независимы.

б) Если $\mathbb{E} f(\xi) \eta = \mathbb{E} f(\xi) \mathbb{E} \eta \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$,
 то f и η линейно зависят.

Задача. Разберитесь доказательство
 а), найдя его в [W], или [Ф], или где угодно.

Кстати, пр.р. $G(\mathbb{R})$ — линейных независимых
 с.в. . Знаем, что $\mathcal{D} \xi = \mu_\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
 Обозначим $\mathcal{D} F(x_n^w) = \eta_n^w$. Тогда (1) принимает
 вид

$$x_{n+1}^w = \eta_n^w + \xi_n^w, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Лемма 2. Мера $\mu_{n+1} = D(x_{n+1})$ заданная
по отношению мер μ_n и $D(\xi_n) = \mu_\xi$.

Доказательство. Так как ξ_n и $\eta_n = P(x_n)$
независимы с.в., то

$$(3) \quad \mu_{n+1} := D(\eta_n + \xi_n) = D(\eta_n) * \underbrace{D(\xi_n)}_{\mu_\xi}.$$

Здесь $*$ — свёртка мер. Она определяется так:

Если $\nu_1, \nu_2 \in P(M)$, то $\nu_1 * \nu_2 \in P(M)$,
и для любого множества $A \in \mathcal{B}(M)$,

$$(4) \quad (\nu_1 * \nu_2)(A) = \int_M \mu_2(A-x) \nu_1(dx) = \\ = \int_M \mu_1(A-y) \nu_2(dy)$$

См. [4, гл. 1].

Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $\nu_j = P_j(x) dx$.

$$\mu_2(A-x) = \int_{A-x} P_2(y) dy \stackrel{y=z-x}{=} \int_A P_2(z-x) dz.$$

Подставим в (4),

$$(\nu_1 * \nu_2)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x) \left(\int_A P_2(z-x) dz \right) dx = \\ = \int_A dz \left[\int_M P_1(x) P_2(z-x) dx \right]. \quad \text{Кстати,}$$

$$\nu_1 * \nu_2 = P_3(z) dz, \quad P_3(z) = P_1 * P_2 = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x) P_2(z-x) dx.$$

свёртка функций
 P_1 и P_2

□

Операция $\nu_1 \star \nu_2$ определена.

Т.е., если $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ и $\mu_3 := \alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$, то

$$(5) \quad \mu_3 \star \nu_2 = \alpha \mu_1 \star \nu_2 + (1-\alpha) \mu_2 \star \nu_2$$

итак,

$$(6) \quad \boxed{\mu_{n+1} = D(F(x_n)) \star \mu_3 = (F \circ \mu_n) \star \mu_3}$$

Но - по определению (см. лемма 1.2),

$$D(F(x_n)) = F \circ D(x_n) = F \circ \mu_n \leftarrow$$

Отображение $\mu \mapsto F \circ \mu$ также линейно в смысле (5). Итак, отображение

$$(7) \quad \mu_n \mapsto \mu_{n+1}, \quad \text{определённое в (6),}$$

— это линейная операция в $\mathcal{P}(M)$!

Значит, изучать динамику (6) — это изучать итерации линейного оператора (7). Очевидно что μ_{n+1} зависит только от μ_n и от F и μ_3 . Мы доказали

Лемма 1. Динамика на μ_n линейна и

зависит только от F , от μ_3 и от $\mu_D = D(\nu)$.

В частности, для малых (1.2)

и (1.4) она удивительна.

Def. Слабое решение задачи (1), (2) — это совокупность с.в. $\tilde{x}_n^w$, $n \geq 0$, и с.в. $\tilde{\xi}_n^w$, $n \geq 0$ определенных на нек. вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, таких что

- 1) $\{\tilde{\xi}_n^w\}$ — незав. с.в., $D\tilde{\xi}_n^w = \mu_{\xi} \forall n$; ($\mu_{\xi} = D\xi$)
- 2) $D\tilde{x}_0^w = Dv$,
- 3) $\tilde{x}_{n+1}^w = F(\tilde{x}_n^w) + \tilde{\xi}_n^w \quad \forall n \geq 0$ для н.в. w .

Следствие 1 (из Теор. 1). $D\tilde{x}_n^w = \mu_n \forall n \geq 0$ для любого слабого решения, где $\mu_n = Dx_n$ и $\{\xi_n\}$ — сильное решение (1), (2).

Пример. Пусть $\{\xi_n^w\}$, $n \geq 0$ — сильное решение (1), (2). Пусть $m \geq 1$ и

$$y_n^w = x_{m+n}^w, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $\{y_n^w, n \geq 0\}$ — слабое решение (1) с н.в. $y_0^w = x_m^w$.

Задача 3. Докажите это.

Еще один взгляд на систему (1), (2). Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $\vec{\xi}^N = (\xi_0, \dots, \xi_{N-1}) \in M^N$ — не-случайный вектор. Пусть $y_0 \in M^N$.

Рассмотрим совокупности

$$(8) \quad x_{n+1} = F(x_n) + \xi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(9) \quad x_0 = y_0.$$

Они позволяют выразить x_n через y_0 и $\vec{\xi}^N$. Можно это записать,

$$(10) \quad x_n = G^N(y_0, \vec{\xi}^N), \quad G^N: M \times M^N \rightarrow M.$$

G^N — непрерывное отображение.

Тогда преобразование ξ α_n , $n \geq 0$, заданное (1), (2) можно записать как

$$(11) \quad \alpha_n^w(v) = G^n(v, \xi_0^w, \dots, \xi_{n-1}^w), \quad n \geq 0.$$

В частности,

$$\mu_N = D \alpha_N = G^N \circ D(v, \xi_0^w, \dots, \xi_{N-1}^w), \quad N \geq 0.$$

Но с.в. $v, \xi_0, \dots, \xi_{N-1}$ все независимы.

Значит (см. [Ф, W]),

$$\begin{aligned} D(v, \xi^N) &= D(v) \times D(\xi_0) \times \dots \times D(\xi_{N-1}) = \\ &= D(v) \times \mu_{\xi} \times \dots \times \mu_{\xi} = D(v) \times \mu_{\xi}^N \end{aligned}$$

Итак, μ_N — это образ v при $D(v) = v$

при отображении

$$(12) \quad \beta(M) \ni v \mapsto G^N \circ (v \times \mu_{\xi}^N) =: S_N^*(v),$$

$$S_N^* : \beta(M) \rightarrow \beta(M), \quad N \geq 0$$

Тогда построено,

$$(13) \quad S_N^*(v) = D(\alpha_N^w(v)), \quad D(v) = v,$$

где $\{\alpha_n(v), n \geq 0\}$ — решение (1), (2), и $D(v) = v \in \beta(M)$

Замечание. Если $v \in M$ не связано, то $D(v) = \delta v$

Лемма 3. Отображения $\{S_n^*, n \geq 0\}$ образуют полукольцо:

$$a) \quad S_0^* = id, \quad b) \quad S_n^* \circ S_m^* = S_{n+m}^*, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

в) Эти отображения удовлетворяют соотношению (5).

$$2) \quad S_n^*(v) = D \tilde{\alpha}_n, \quad \text{где } \{\tilde{\alpha}_n\} - \text{модуль}$$

скадов преобразование и $D(v) = v$.

(задача (1), (2))

Док. а) очевидно. б) следует из (12),
а 2) следует из следствия д). Достаточно δ).

Условием $\alpha_{m+j} = y_j, j \geq 0$, и $D \vee = \emptyset$.

дока

$$D y_0 = D \alpha_m = S_m^*(x).$$

Далее, по определению,

$$S_{m+n}^* \vee = D \alpha_{m+n} = D y_n$$

(м.к. $y_n = \alpha_{m+n}$).

Но по Запале 3 $\{y_j, j \geq 0\}$ — числовое семейство
в смысле 2),

$$(1). \text{ Поэтому, } D y_n = S_n^*(D y_0) = S_n^*(S_m^*(x)). \quad \square$$