

# **Людмила Всеволодовна Келдыш (к ее столетию)**

## **А.В. Чернавский**

### **Введение**

*Людмила Всеволодовна Келдыш (1904 -- 1976) была выдающимся математиком. Она бралась за решение очень сложных проблем, требовавших максимального напряжения творческих сил. Но она также была и замечательной женщиной, матерью пяти детей в семье ученых, с душевной силой преодоления тех известных испытаний, с которыми встретилась российская интеллигенция в первые две трети 20-го века.*

*Теперь нет ничего необычного, если молодая женщина выбирает карьеру математика и становится профессионалом высокой квалификации. Но до второй половины 20-го века это было очень редким событием, почти единственными примерами служили Софья Ковалевская и позже Эмми Нёттер. Поэтому выбор математики в качестве своей профессии молодой представительницей семьи, довольно-таки далекой от науки, хотя и принадлежащей к русской интеллигенции, был актом, который свидетельствовал о незаурядной духовной силе. И жизнь Людмилы Келдыш показала, что этот выбор не был случайной прихотью, но был истинным призванием.*

*Исследовательская работа Л.В. Келдыш отчетливо делится на три периода. Первый (перед второй мировой войной) был исключительно посвящен изучению структуры борелевских классов и он привел к ее докторской диссертации; она была успешно защищена в 1941 году (полный текст появился в 1945 году в Трудах МИАН).*

*После войны Л.В. изучала непрерывные отображения компактов с точки зрения механизмов повышения размерности. Это привело ее к ряду структурных теорем, и также к конструкции замечательных примеров, которые отвечали на базисные вопросы, оказавшиеся до того неприступными.*

*В конце 50-х годов Л.В. обратилась к геометрической топологии многообразий, предмет, который к этому времени созрел для решения основных проблем: комбинаторной и топологической эквивалентности, триангулируемости, классификации вложений и т.д. В эту область Л.В. внесла технику, которую она успешно освоила в своей работе с непрерывными отображениями, особенно понятие псевдоизоморфии, которое тут оказалось очень плодотворным. Она организовала семинар по геометрической топологии, вначале в рамках московского топологического семинара П.С. Александрова. В последнее десятилетие жизни Л.В. ее семинар внес свой весомый вклад в получение теперь классических решений этих проблем.*

### **История семьи**

Л.Вс. выросла в семье крупного инженера, в которой было семеро детей, она была старшей. Фамилия Келдыш, как предполагают, тюркского происхождения, от слова "кельди" = "он пришел" (окончание "ш" ласкательное). Имя вначале, возможно, было дано мальчику, родившемуся после нескольких девочек, которого "долго ждали". Впрочем, предков тюркского происхождения в семье не знают.

Фома Симонович Келдыш, прадед Л.Вс., был псаломщиком православного собора в Варшаве. Его сын Михаил, родившийся в 1839 году, учился в военно-медицинской академии, сначала в Варшавской, потом в Петербургской, и затем участвовал в войнах на Кавказе и с Турцией. Позже он занимался практической и научной эпидемиологической деятельностью, составив, в частности, медико-топографическое описание прикаспийского края. За свою службу он получил генеральский чин и дворянское звание. Он умер в 1920 году. Жена Михаила Фомича была двоюродной сестрой генерала Брусилова (известного по "Брусиловскому прорыву" в 1-ю мировую войну).

Всеволод Михайлович Келдыш, отец Л.Вс., родился в 1878 году во Владикавказе во время бесконечных скитаний отца по югу России. Он окончил Политехнический институт в Риге и стал инженером строительной специальности. Там же он женился на Марии Александровне Скворцовой. По роду его службы и ему приходилось переезжать из города в город. Л.Вс. родилась в Оренбурге 12 марта 1904 года. Шестеро других детей родились в Риге, Хельсинки, Петербурге и Москве.

Мать Л.Вс. родилась в 1879 году в дворянской семье. Ее дед Николай Скворцов был генералом. Во время кавказской войны он был тяжело ранен и его выносили в грузинском доме две женщины, мать и дочь. Он помог дочери устроиться в Смольный институт и позже женился на ней. Отец Марии Александровны также был генералом. Его жена, Софья Иосифовна Ковзан имела польские корни.

Семейное предание гласит, что прапрадед Марии Александровны, врач, как-то гостили на Украине в поместье у друзей и нашел больную девочку, оставленную ушедшим табором. Он вылечил девочку, которая осталась жить в этом поместье, а когда она выросла, на ней женился. О справедливости этой легенды можно судить только по цыганским чертам внешности, выраженным у некоторых членов семейства, особенно у Мстислава Всеволодовича, хотя и не у Л.Вс.

В первую мировую войну начались первые испытания в жизни еще 11-летней девочки. В связи с наступлением немцев на Ригу Политехнический Институт, где преподавал Всеволод Михайлович, был переведен в Москву. В семье было уже шестеро детей, младший год. Жить пришлось под Москвой, мальчики ездили учиться в Москву на поезде, иногда на крыше переполненного вагона. С питанием, особенно в 1917-18 годах было трудно настолько, что в некоторые дни семье приходилось довольствоваться жареным луком. Легче стало позже, отчасти благодаря помощи АРА ("Администрация американской помощи"), занимавшейся послевоенной благотворительностью.

Седьмой ребенок, дочь, родилась в 1920 году. Отец считал, что надо верить в лучшее будущее, и девочку назвали Верой.

В начале 20-х годов семья жила в Иваново, где Людмила окончила школу. Одна лекция Н.Н. Лузина, преподававшего тогда в Иваново, определила выбор ею профессии. Она поступила на физико-математический факультет Московского университета, где Лузин позже стал ее научным руководителем.

## Николай Николаевич Лузин

Н.Н.Лузин (1883-1950) был главой московской математической школы, известной как 'Лузитания'. Он поступил в Московский Университет в 1901 году. В это время математическая жизнь в университете была очень живой и он активно участвовал в ней (он

был секретарем математического кружка, руководимого Н.Е. Жуковским). Но в 1905 году, в период революционной вспышки, политическая жизнь в стране и особенно в Москве, стала чрезвычайно напряженной, что влияло и на университетскую жизнь. Возникли студенческие забастовки, и однажды Лузину пришлось прятать бомбу в своей постели! К счастью, его учителю Д.Ф. Егорову, главе московской математики в это время, удалось отправить Лузина во Францию.

Счастливая возможность слышать знаменитых ученых — Пуанкаре, Адамара, Дарбу — и очень интенсивно работать в библиотеке Сорбонны, оказала на него глубокое влияние. Занятия Лузина в семинаре Адамара в 1912 году были особенно значимыми. Там он встречался с выдающимися математиками, а именно, с Лебегом и Борелем, идеи которых имели определяющее влияние на его мысли об основаниях математики.

Он вернулся в Москву в 1912 году и начал преподавать на математическом факультете университета. Он имел исключительный стиль преподавания, притягивающий учеников к самостоятельному творчеству. Работа в его семинарах никогда не кончалась по звонку, она продолжалась до дверей его квартиры и часто внутри нее. Его студентами, образовавшими Лузитанию<sup>1</sup>, были М.Я. Суслин, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин П.С. Александров, П.С. Урысон, Д.А. Люстерник, А.Н. Колмогоров, Н.К.Бари, П.С.Новиков и Л.В. Келдыш.

В сурое время революционного кризиса 1917 года некоторые московские профессора, Лузин в их числе, переехали в Иваново преподавать в новом Политехническом институте (не прерывая связей с московским университетом). Он пробыл в Иваново с 1918 по 1922 год и здесь Людмила Келдыш, еще школьница, встретила человека, который дал направление ее будущей научной жизни.<sup>2</sup>

## В родительской семье

Отец в 20-х годах преподавал в Москве. Он заведовал в военно-инженерной академии кафедрами, сначала железобетона, затем строительных конструкций. В стране быстро развернулось большое строительство, и он стал одним из ведущих консультантов таких больших строек как Днепрогэс, канал Москва-Волга, метрополитен в Москве и др. Он также получил звание генерал-майора. Когда молодежь вокруг него начинала фронтовые речи, он охлаждал их, говоря: "Вот вы недовольны современной жизнью, а я не мог найти себе работу по душе в царское время, ушел целиком в преподавательскую деятельность. А сейчас у меня есть интересная и живая работа".

Семья была большая. Кроме семерых детей и жены она включала мать и тещу. Последние не получали пенсий будучи генеральшами, к тому же дворянками. Но семья была обеспечена, т.к. отец относился к категории высокооплачиваемых. Он ушел в отставку в возрасте 80 лет, оставаясь консультантом и умер внезапно в возрасте 87 лет. Его жена Мария Александровна умерла раньше, в 1953 году.

<sup>1</sup> Это имя большого океанского лайнера торпедированного немецкой подлодкой в 1915 году, известное событие первой мировой войны. Подробности можно узнать в Интернете <http://www.lusitania.net/>. Заметим еще, что *Лузитанией* называлась римская провинция, располагавшаяся примерно на территории нынешней Португалии.

<sup>2</sup> Для знакомства с философскими и религиозными взглядами Лузина можно рекомендовать замечательную статью "A comparison of two cultural approaches to mathematics: France and Russia, 1890 -- 1930", авторы L. Graham и J.-M. Kantor (<http://www.math.jussieu.fr/~kantor/>).

Моральные устои семьи были типичными для русской интеллигентной семьи начала 20-го века. Мария Александровна посвятила жизнь семье, детей обучала языкам, немецкому и французскому, старалась привить любовь к музыке. Родители играли вместе в четыре руки, посещения оперы и концертов классической музыки были регулярными. Родители не отказывали себе в этом удовольствии даже в тяжелое послереволюционное время, когда возвращаться с концерта в Лосинку приходилось из Москвы пешком. Но среди детей только один сын Юрий часами сидел за фортепиано, погруженный в музыку, и сделал музыку своей специальностью, став, однако, не пианистом, а известным музыковедом. Впрочем, Л.Вс. иногда играла на фортепиано для себя.

Семья не была религиозной. Лишь бабушка Софья Иосифовна водила младшую дочь Веру в церковь, вынуждая родителей оправдываться, что дочь "сама разберется, когда вырастет". Все же, основные праздники, рождество и пасха, отмечались в традиционном духе, куличами, крашенными яйцами, посещением храма Христа Спасителя, где во время пасхальной службы пели лучшие силы Большого театра. Л.Вс. как-то сказала, что в тяжелую минуту она иногда заходила в пустую церковь – постоять в тишине.

Часто собирались молодежь, в основном друзья старшей дочери Людмилы, студенты и аспиранты математики, среди которых были А.Н. Колмогоров, И.В. Арнольд (отец будущего академика), П.С. Александров, П.С. Новиков, будущий муж Л.Вс. и другие. Были и друзья-музыканты сына Юрия. Были игры, смех, серьезные разговоры. Сильный характер Л.Вс. оказывал влияние на других детей. По ее совету Мстислав (будущий президент Академии) пошел на математический факультет, вопреки желанию отца, чтобы он стал строителем, как и отец.

Профессию отца инженера-строителя унаследовала только дочь Любовь Всеволодовна, которая была любимицей отца и была хранительницей домашнего архива. Младшая дочь Вера Всеволодовна в настоящее время работает в ЦАГИ. Она написала небольшую историю семьи, опубликованную в юбилейной книге о М.В. Келдыше (изд-во Наука. 2001 г.) [1], из которой и заимствовано большинство приведенных здесь сведений об истории семьи.

Семейные традиции сохранились и в семье Людмилы Всеволодовны и Петра Сергеевича Новикова. Они встретились в университетской среде, в кругу Н.Н. Лузина, и поженились в 1934 году. С самого начала совместной жизни Л.Вс. была не только женой и матерью большого семейства, но и, можно сказать, ангелом-хранителем математического творчества своего мужа, которое она всегда, с полным пониманием, ставила выше своего собственного. Среди участников Лузитании они оба были наиболее близкими к главе школы Н.Н. Лузину по своему духу и по своим научным интересам. Вместе они написали замечательный комментарий к его книге об аналитических множествах, первые их работы были направлены на решение задач, интересовавших Лузина. С 1934 года они являлись сотрудниками МИАН им. Стеклова.

Позже их интересы разделились, но Л.Вс. следила за работой Петра Сергеевича, участвовала в семинарах, в которых он рассказывал о своих новых результатах. Она внимательно изучала его доказательство неразрешимости проблемы слов для групповых представлений, и позже вместе с С.И. Адяном она редактировала написанный им текст. Еще позже она убедила С.И. Адяна присоединиться к Петру Сергеевичу для завершения его работы по отрицательному решению проблемы Бернсайда.

## Предвоенный период научной работы: борелевские множества

Л.Вс. стала профессиональным математиком в школе Н.Н. Лузина, в знаменитой Лузитании, полноправным членом которой она была с первых своих шагов в науке. Ее имя получило известность после ее первого результата, который был впервые опубликован в лекциях Лузина [2] в 1930 году. Он заключался в построении арифметического примера (с помощью цепных дробей) множества 4-го класса по Борелю. Это было первое серьезное продвижение в изучении борелевской классификации с 1905-го года, когда Бэром был построен первый нетривиальный пример – множества третьего класса. Л.Вс. с удовольствием вспоминала, что когда ее представили приехавшему в Москву Хопфу, тот сразу же воскликнул: "А! пример четвертого класса!".

Интерес к дескриптивной структуре множеств, т.е. к описанию процессов, которыми они могут быть построены, связан с вопросом измеримости, одним из фундаментальных вопросов анализа. Борель и Лебег дали два определения измеримости. Борелевское определение в некотором смысле минимально: оно дает те множества, которые можно получить из интервалов с помощью счетнократного применения операций суммирования и пересечения счетных наборов множеств. При этом естественно возникает трансфинитная классификация таких множеств. Измеримость по Лебегу значительно шире, хотя были построены и множества не измеримые в его смысле. Эти идеи связались с проблемами, относящимися к континуум-гипотезе, и особенно к эффективности построений, что тогда означало отказ от аксиомы Цермело. Построение неизмеримого множества было в этом смысле не эффективным, но Лебег дал эффективный пример множества не измеримого в смысле Бореля. Все это требовало подробного изучения природы континуума и анализ эффективности процессов построения его подмножеств различных типов. Именно это направление и стали исследовать Лузин и его школа.

Естественным началом этой деятельности было подробное изучение борелевских множеств. Известно, что первый успех состоял в решении П.С. Александровым задачи, поставленной Лузиным, о совершенном ядре в каждом несчетном В-множестве. При этом была построена новая операция, которая помимо борелевских строила также множества, выходившие за пределы борелевской классификации, как это было показано М.Я. Суслиным. Суслин дал им название А-множеств. Их также называют суслинскими.

Лузин уточнил классификацию борелевских множеств по Валле-Пуссену, введя, в частности, понятие элементов} данного трансфинитного класса  $\alpha$ : это счетные пересечения множеств меньшего класса, их счетные суммы дают все множества класса  $\alpha$ . Он поставил в неопределенной форме задачу найти канонические элементы, не дав четкого определения этого понятия.

“Мы называем каноническими те элементы класса  $K_\alpha$ , которые имеют достаточно простое свойство и такие, что можно получить каждое множество класса  $K_\alpha$ , беря объединение счетного множества канонических элементов... Было бы желательно иметь в каждом классе конечное число типов канонических элементов, так чтобы элементы одного типа были бы гомеоморфны между собой.” [2, стр.]

В 1927 году в статье П.С. Александрова и П.С. Урысона (написанной П.С. Александровым по материалам бесед 1924 года между ними с П.С. Урысоном) был разобран случай множеств второго класса. Роль канонических элементов играли подмножества двух типов, которые оказались гомеоморфными множеству иррациональных чисел.

Л.Вс. построила арифметические примеры (с помощью цепных дробей) для всех эффективно заданных счетных трансфинитов (с перечислимым множеством меньших трансфинитов). При этом она дала полное описание структуры произвольного В-множества (в бэрровском пространстве), сформулировав понятие канонических элементов.

Элемент Е данного класса она назвала *каноническим*, если каждое его открыто-замкнутое подмножество *универсально* в этом классе (т.е. возможно вложить в Е любое другое множество этого или меньшего класса в качестве замкнутого подмножества), и если он имеет первую категорию на себе в каждом открыто-замкнутом подмножестве своего замыкания<sup>3</sup>. Она показала, что канонические элементы каждого класса гомеоморфны между собой (по теореме Лаврентьева они не гомеоморфны для разных классов, начиная с третьего), и что каждое множество данного класса состоит из канонического элемента и счетной суммы множеств меньшего класса. По ее гипотезе саму эту сумму можно сделать меньшего класса. Кроме того, она показала, что конструкция Бэра для третьего класса и ее конструкция для остальных классов как раз и дает канонические элементы в каждом классе.

Ее определение не вполне отвечает на вопрос Лузина – счетная сумма множеств первой категории сама есть множество первой категории. Ее дальнейшее изучение элементов второй категории и поставленный ею вопрос породили в дальнейшем много работ (подробности см. в обстоятельной статье А.В. Островского [3]).

В работах этого периода в полной мере проявился стиль Л.Вс. – на основе безошибочной геометрической интуиции добиться структурной ясности в выбранной теме и построить решающие конкретные примеры. Эта геометричность и приобретенная техника облегчили ей переход в новую для нее область топологии.

Работа Л.Вс. в области дескриптивной теории множеств завершилась непосредственно перед войной. Сообщение об этих результатах, составивших ее диссертацию, было опубликовано в заметке 1941 года в Докладах АН "О структуре В-множеств" [4]. Но полный текст появился (по понятным причинам) только к концу войны в работе на французском языке с тем же заголовком "Sur la structure des ensembles mesurables B" в Математическом Сборнике.

В 1945 году в томе Трудов МИАН "Структура В-множеств" [5] Л.Вс. подвела итог своей десятилетней работе (1930-1940) в этой области. Она написала еще одну заметку в Докладах 1945 года, показав, что каждое А-множество в пространстве Бэра является открытым непрерывным образом множества, являющегося пересечением множеств типа  $F_\sigma$  и  $G_\delta$ . Это был неожиданный результат, так как, как это было показано еще Хаусдорфом, множества типа  $G_\delta$  инвариантны относительно открытых отображений.

После этого она переключилась на топологическую тематику.

## Сталинизм

Но наступало страшное сталинское время. Первой жертвой его в семье был брат матери Николай Александрович, в прошлом офицер царской армии. Из-за его прошлого ему не удавалось устроить жизнь, и семья помогала ему. Он был арестован еще в начале этого времени и был "строителем" Беломоро-Балтийского канала. После, уже в начале войны, его снова арестовали, и он погиб в лагерях.

В 1935 году арестовали Марию Александровну, Всеволоду Михайловичу пришлось пойти на очную ставку. В конце концов, их отпустили домой. Арест проходил "в рамках" кампаний по изъятию золота у имущих в прошлом людей (бывшие кулаки, старая интеллигенция и проч.). Им предложили забрать "ваши побрякушки" обратно.

<sup>3</sup> Т.е. есть счетная сумма замкнутых подмножеств, нигде не плотных в нем.

Следующей жертвой стал брат Михаил. Он оказался в числе большой группы (около ста человек) аспирантов и преподавателей исторического факультета МГУ, арестованных в 1936 году. Только в 90-е годы удалось узнать, что он был расстрелян в 1937 году.

Был арестован и брат Александр в 1938 году "как французский шпион". К счастью, "в органах" произошла смена руководства, благодаря чему многие, в том числе и Александр, были выпущены на свободу. Сначала обвинение в шпионаже заменили на антисемитизм, но его первая жена, еврейка, и другие свидетельствовали в его пользу. В дальнейшем он был на фронте, а после войны, несмотря на мечту стать драматическим артистом, стал администратором в Госконцерте и объездил всю страну.

## **Вторая мировая война**

Очень тяжелым было для семьи военное время. В критический для Москвы день 16 Октября 1941 лишь в последнюю минуту Л.Вс. с тремя сыновьями (старшему Леониду, сыну от первого брака, было 10 лет, младшему Сергею 3 года) удалось попасть в поезд, уходивший из Москвы. Помог А.Н. Колмогоров, представивший их как членов своей семьи. Никто не знал, куда направлялся поезд.

Оказалось в Горький. Еще через несколько дней они уже по Волге добрались до Казани, куда ранее были эвакуированы некоторые институты Академии Наук. Однако Л.Вс. с детьми прибыли не как эвакуированные, а как беженцы – без каких либо вещей, оставшихся в Москве, без теплой одежды, без каких либо гарантий предоставления жилья, по существу, без средств к существованию. Но все же крыша над головой была – вместе с несколькими сотнями таких же беженцев они жили на матрацах в физкультурном зале Казанского Университета. В следующем месяце до Казани добрался и П.С., и их переселили в комнату в коридоре студенческого общежития. Однако П.С. был тяжело болен, и ему предстояла опасная хирургическая операция, исход которой вызывал у врачей большие сомнения. Последующие месяцы холодной и голодной зимы, а потом и весны 1942 года Л.Вс. провела между комнатой в общежитии, где ее ждали ее дети, и больничной палатой, где она сама выхаживала своего мужа после операции. Расстояние между больницей и общежитием было порядка 10 км, никакой транспорт в Казани не функционировал, по крайней мере, в этом районе. А еще надо было чем-то всех накормить. Помимо 300 г хлеба и чайной ложки сахарного песка, выдававшихся в день на человека, денег в семье хватало только на то, чтобы раз в месяц купить на рынке мешок (примерно 50кг) ржаной муки грубого помола. Эта мука, сваренная на воде, под названием "затирка" и стала основной едой семьи на последующие два года.

После возвращения в Москву (в 1943 году) жизнь семьи постепенно вернулась в нормальное русло. Две сестры присоединились к трем братьям, и снова Л.В. Келдыш потребовались вся ее энергия и сила характера, теперь уже чтобы эффективно совмещать свою роль в семье с активной научной работой, без которой она не могла себе представить свою жизнь.

## **Семья Л.В. Келдыш и П.С. Новикова**

Как и в семье ее родителей, главным в семейной жизни было воспитание детей. (Людмилу Всеволодовну даже как-то раз попросили в институте прочитать пару лекций по семейному воспитанию, что она и сделала вполне успешно, судя по воспоминаниям сотрудников.)

Воспитание осуществлялось постоянно, но без каких либо назидательных поучений и наставлений. Основными методами были личный пример родителей и весь стиль жизни семьи. Безусловным приоритетом было преобладание духовных ценностей над материальными. В отношении последних Л. Вс. считала, что дети должны быть опрятно одеты и доброкачественно накормлены, но абсолютно без каких либо излишеств и в том и в другом. ("Низкопробный шик!" - характерное для нее высказывание о ком-либо одетом с ее точки зрения слишком претенциозно.) И еще – как можно больше бывать на воздухе и вне города. Во все годы, включая даже военные, когда все ее время и силы были поглощены борьбой за выживание семьи, она находила и снимала хотя бы одну комнату в какой-нибудь деревне в нескольких десятках километров от города и вывозила туда детей на все лето.

Вообще она любила природу. И даже в поздний период жизни, когда дети уже выросли и жили отдельно, не ездила в санатории и дома отдыха, а предпочитала им туристические базы, где жила в палатке в лесу на берегу какой либо реки или озера. Курение же П. С. рассматривала как его единственный недостаток, с которым она однако бессильна была бороться.

Воспитание духовное не следовало какой-то жесткой схеме. Единственное, что Л. Вс. считала обязательным сверх обычного школьного образования, это изучение иностранных языков и чтение. Поэтому ко всем праздникам помимо всяких других подарков она обязательно дарила детям книги. Книги самые разные, стараясь не делать перекоса ни в одну сторону. А далее чтение этих книг становилось в семье поводом для застольных разговоров о литературе, об истории, об искусстве, о науке, о жизни. Это и было воспитание.

По мере взросления детей все большую роль в этих беседах играл П. С.. Иногда разговор затрагивал какой-то вопрос морали или этики и тогда один из родителей высказывался на тему "что такое хорошо и что такое плохо". Обычно в весьма категоричной форме, но как бы мимоходом, не вдаваясь в обсуждение и как бы подразумевая, что обсуждать тут нечего. В остальных же случаях разговор шел именно как обсуждение или даже спор, а не как поучение старших младшим.

Родители нередко говорили о важности того, чтобы каждый выбирал себе профессию самостоятельно, руководствуясь только своими склонностями и способностями. И старались по возможности содействовать этому, развивая у детей широту кругозора. Сами они могли в этом отношении служить примером для подражания, поскольку оба вышли из семей, в которых до них не только математиков, но и вообще научных работников не было.

Тем не менее, все трое сыновей избрали для себя именно физико-математические науки. Старший Леонид – физик. Некоторое время был академиком-секретарем отделения Общей Физики и Астрономии Российской Академии Наук. Младший Сергей – академик, известный математик, имя которого нет нужды представлять математической аудитории. Средний сын Андрей был, по мнению его научного руководителя И. Р. Шафаревича, также талантливым математиком. Но он трагически погиб.

Исключением стала только младшая сестра Елена – филолог, переводчик. Преподает французский и португальский языки в МИМО. Старшая из сестер Нина умерла от тяжелой болезни.

Выбор сыновей, возможно, следует приписать тому, что при наличии у обоих родителей близких научных интересов обсуждение научных проблем, зачастую весьма эмоциональное, составляло часть домашнего обихода. Тем более, что многие ближайшие друзья родителей еще со студенческих лет — физики А. А. Андронов и М. А. Леонович, астроном Н. Н. Парицкий и др. — были не только выдающимися представителями той же профессии, но и весьма яркими разносторонними личностями.

Другим существенным фактором могло послужить и то, что время взросления сыновей совпало с периодом расцвета физико-математических наук, или, точнее, их популярности в обществе во всем мире.

Однако круг интересов Л.Вс. и П.С. распространялся далеко за пределы собственно науки, охватывая, по существу, всю сферу культуры. Можно сказать, что культура для этой семьи была формой жизни. В послевоенные годы в число ближайших друзей вошла семья В.В. и О.А. Домогацких. Она – скульптор, он - график, знаток живописи, скульптуры, истории искусств и вообще истории, с широким кругом знакомств в среде потомственной московской интеллигенции. Через них в дом вошли и другие люди из мира искусств, а на стенах квартиры появились подлинные произведения Фонвизина, Фалька, Кузнецова, Мещерина, Крымова и др.

Л.Вс. была "естественным объектом" журналистского любопытства, особенно ко дню 8 марта. Она относилась к этому с вежливым раздражением. Особенно ее смешали разговоры о "женской математике". (П.С. Александров как-то сказал, что Л.Вс. является собой настоящий пример женщины-ученого, а не ученой женщины.) В конце 40-х годов один журналист получил задание подготовить для своего журнала большую статью о женщине - профессоре математики, матери пятерых детей, о ее работе, семье, общественной деятельности. Он потратил много сил и времени, беседовал с самой Л.Вс. и со многими людьми вокруг, а потом как-то позвонил и огорченно сообщил: «Наш редактор сказал: "Это не пойдет — воспитание детей в семье индивидуалистическое. И вот результат — старший сын не комсомолец!"».

В повседневной жизни Л. Вс. следовала некоему моральному кодексу, весьма жесткому, но без каких либо элементов лицемерия или ханжества. Строго говоря, по настоящему жестко она предъявляла эти требования в первую очередь к себе самой. К окружающим же была гораздо более снисходительна. Тем не менее, высшими качествами человека для нее были порядочность и интеллигентность, причем в ее понимании эти два понятия были как бы неразделимы. Иными словами, интеллигентным она могла назвать только порядочного в ее глазах человека. Менее существенным был формальный образовательный уровень. А иногда она могла говорить и о "внутренней интеллигентности" какого-то совсем мало образованного человека. Она легко и в своей обычной манере разговаривала с людьми самого разного общественного положения и образования, не стараясь подстроиться к культурному уровню и к речи собеседника, но всегда с неизменным уважением к нему. Так же неизменно считала своим долгом помогать попавшим в беду и жертвам всякой несправедливости, хотя активным борцом со злом не была как из-за врожденного отсутствия агрессивности, так и в силу поглощенности семьей и наукой.

Характерен такой пример. В послевоенный период обострения сталинизма были организованы комиссии по "чистке" в коллективах трудящихся. Такая комиссия была и в Институте Стеклова. В.А. Рохлин, принятый в Институт по настоянию Л.С. Понtryгина в качестве его помощника, понимал, что он будет первой жертвой ее работы и ушел из Института до начала работы комиссии. Под давлением ученого секретаря Института, будущего академика Марджанишвили, на общем собрании сотрудников, которое по правилам игры требовалось провести, было принято решение (сильно осложненное в дальнейшем жизнь Рохлина) считать, что он уволен по результатам работы этой комиссии. Против голосовали 6 человек, среди них П.С. Новиков и Л.Вс. Келдыш. (Остальные были А.А. Марков, Б.Н. Делоне, А.О. Гельфонд и И.Р. Шафаревич.)

В то время более высокое проявление гражданской позиции вряд ли можно было вообразить. Этой позиции они не изменяли никогда. И их участие в поддержке и защите инакомыслящих в конце 60-х начале 70-х годов привело к конфликтам, сократившим жизнь двух замечательных людей.

## Научная работа после войны. Топология

## Повышение размерности. Нульмерные отображения

К концу первого периода топологическая тема в работах Л.Вс. стала выдвигаться на первый план, и она вполне естественно перешла к изучению непрерывных отображений компактов. Отличительной особенностью ее работ в топологии снова является их конкретный, геометрический характер и, как и в теории В-множеств, направленность на выяснение структуры отображений общего вида и построение решающих примеров.

В особенности ее заинтересовали проблемы, которые в частности, ставил П.С. Александров, ее старший товарищ по Лузитании и глава Московской топологической школы, и которые были направлены на изучение механизма повышения размерности. Главную роль играют три класса непрерывных отображений – *нульмерные* (с нульмерными прообразами точек), *монотонные* (со связными прообразами точек) и *открытые* (переводящие открытые множества в открытые). Всякое отображение распадается в композицию монотонного и нульмерного, из чего следует первоочередная важность их изучения. Что касается открытых отображений, то долгое время казалось, что они должны быть достаточно тесно связаны с топологическими свойствами пространств, чтобы, вслед за гомеоморфизмами, сохранять размерность. (Если гомеоморфизм устанавливает изоморфизм структур открытых подмножеств двух пространств, то открытое отображение индуцирует структурный гомоморфизм, имеющий односторонний обратный.)

Нетрудно увидеть, что открытым отображением нельзя повысить размерность отрезка и что монотонным открытым отображением нельзя повысить размерность квадрата. Несколько сложнее показать, что нельзя повысить размерность квадрата нульмерно открытым отображением.

Почти десятилетние исследования механизма повышения размерности привели Л.Вс. Келдыш к результатам, которые до сих пор остаются в этих вопросах главными достижениями. Ей принадлежат здесь наиболее геометрические и вместе с тем наиболее трудные конструкции примеров, показывающих, что уже в области элементарно-геометрических объектов условие открытости не предохраняет от возможности повышения размерности как для нульмерного, так и для монотонного (даже для многообразий) случая.

Гипотеза П.С. Александрова, что непрерывное отображение компакта, повышающее размерность на конечное число единиц, есть суперпозиция конечнократного отображения и отображения не повышающего размерность, была в общем виде достаточно быстро отвергнута. Л.Вс. показала в [7], как следует изменить формулировку этой гипотезы.

Она начала с изучения структуры нульмерных неприводимых отображений отрезка на куб (т.е. кривых Пеано). Под неприводимым понимается отображение, при котором никакое замкнутое собственное подмножество не отображается на весь образ (иначе: всюду плотно множество точек единственности ( $x=f^{-1}fx$ ))

Результат Л.Вс. Келдыш гласит: всякое неприводимое отображение  $f$  сегмента  $I$  на  $k$ -мерный куб  $I^k$  может быть представлено в виде суперпозиции  $2(k-1)$  непрерывных отображений:

$$f = \phi_{k-1}\psi_{k-1} \dots \phi_1\psi_1, \quad (1)$$

где все  $\psi_p$  суть нульмерные отображения, не повышающие размерность, а все  $\phi_p$  суть двукратные отображения, каждое из которых повышает размерность ровно на единицу. Так как при двукратном отображении размерность не может повыситься более чем на единицу, то результат Л. В. Келдыш является окончательным и полностью выясняет картину, имеющую место при неприводимых пеановских отображениях. Она также указала свойство отображения, позволяющее ему иметь представление в форме (1).

Разработанная при получении этого результата техника дала возможность Л.Вс. изучить структуру нульмерных отображений произвольных конечномерных компактов и в особенности нульмерных открытых отображений. Среди открытых отображений неприводимы только гомеоморфизмы. Между тем Л.Вс. указала любопытный класс отображений, в который входят и нульмерные и открытые отображения. Это *кусочные* отображения, которые переводят куски в куски, где куском называется замыкание открытого подмножества. Для нульмерных кусочных отображений она показала представимость их в виде композиции неприводимого и открытого отображения, причем второе равномерно (на всех открытых подмножествах) не повышает размерности. После этого она показывает, что в случае открытого нульмерного отображения неприводимую компоненту можно построить так, что она будет обладать упомянутым выше свойством, которое обеспечивает ее представление в виде (1). В результате нульмерно открытое отображение компакта, повышающее размерность на  $k$ , имеет представление в виде композиции  $2k+1$  отображений, из которых нечетные равномерно не повышают размерность, а четные двукратны и повышают размерность на единицу. Таким образом, размерность повышается за счет двукратных неприводимых склеек.

Достаточно сложная техника доказательства этих результатов довольно очевидным образом коренится в технике дескриптивной теории множеств, особенно операции решета. То же, в еще большей степени, можно сказать о результате, увенчавшем эту серию работ Л.Вс. – ее примере нульмерно открытого отображения кривой Менгера на квадрат.

### **Повышение размерности. Нульмерно открытые отображения**

Первый неожиданный пример повышения размерности нульмерно открытым отображением был построен в 1937 году А.Н. Колмогоровым [7]: на кривой Менгера действует 2-адическая группа и ее пространство орбит есть двумерная поверхность Понtryгина (нарушающая теорему суммы в теории размерности). Размерностная неполноценность этого континуума оставляла сомнения. Однако затем были построены новые примеры открытого отображения одномерного континуума: Я.М. Кажданом – на квадрат и О.В. Локуциевским – на гильбертов параллелепипед. В них отображение строится как композиция монотонного, но не открытого отображения повышающего размерность и нульмерного отображения, т.е. размерность повышалась не за счет открытого отображения.

Пример, построенный Л.Вс в [8], принадлежащий классике геометрической топологии, наглядно показывает механизм повышения размерности и обеспечения открытости в конкретном случае отображения одномерного континуума (отождествляемого с кривой Менгера) на квадрат. Позже Б.А. Пасынков разработал изящную технику, с помощью которой оказалось возможным, используя пример Л.Вс. в качестве "затравки", строить нульмерно открытые отображения кривой Менгера даже на гильбертов параллелепипед. Отсюда следует, что каждый компакт есть нульмерно открытый образ одномерного компакта. (Нужно отметить очень четкое и очень помогающее пониманию примера Л.Вс. изложение его Пасынковым в [9].)

Изучение нульмерно открытых отображений имеет значение с точки зрения открытой классической проблемы (Гильберта – Смита) о возможности эффективного действия  $p$ -адической группы на многообразии. Такое действие дает нульмерно открытое отображение на фактор-пространство, повышающее размерность, как доказано Янгом, по крайней мере на две единицы. Оно должно быть достаточно экзотичным. Например, если действие свободно, а база локально односвязна, то отображение есть локально тривиальное расслоение, пространство которого, конечно, не может быть многообразием и отображение должно сохранять размерность. Неконечнократные нульмерно открытые

отображения многообразий размерности 3 и выше, повышающие размерность (далекие от группового действия), были построены Д. Уилсоном [10] и Дж. Уолшем [11] в 1972-76 годах. Использованная ими техника была очень близка к технике второй серии работ Л.Вс. – о монотонно открытых отображениях.

### **Повышение размерности. Монотонные и монотонно открытые отображения**

Было известно, что монотонные отображения не повышают размерности двумерных многообразий. Мазуркевич в 1930 году построил пример монотонного отображения одномерного континуума на гильбертов параллелепипед, откуда непосредственно вытекает существование монотонного отображения одномерного компакта на любой данный компакт, а также монотонное отображение куба размерности три и выше на компакт, содержащий гильбертов кирпич. Позже Андерсон показал [12], что существуют монотонно открытые отображения кривой Менгера на гильбертов параллелепипед.

Много труднее было построить монотонное отображение куба на куб} большей размерности. Л.Вс. построила в 1955 году [13] такое отображение трехмерного куба на четырехмерный, из которого легко получить отображение куба любой размерности, начиная с трех, на куб любой большей размерности и на гильбертов кирпич. Было существенно, что в ее примере отображение является неприводимым (в этом случае множество  $E$  одноточечных прообразов точек есть плотное  $G_\delta$ , на котором отображение гомеоморфно).

В следующем году она показала [14], что монотонное неприводимое отображение любого континуума на многообразие  $M$  размерности больше двух, при котором множество  $E$  связно, можно преобразовать в монотонно открытое отображение на  $M$  с помощью как угодно малого отображения  $M$  на себя. Тем самым был получен основной во всей тематике результат: доказана возможность открыто и монотонно отобразить куб на куб любой размерности (и на гильбертов кирпич).

Следующее замечание, сделанное Л.Вс., вскрывает геометрическую суть ее построения монотонного отображения 3-куба на 4-куб. Оказывается, что оно может быть получено как предел  $\varepsilon$ -плотных вложений, обладающих тем свойством, что любой путь в 4-кубе можно с помощью  $\delta$ -сдвига перевести в образ 3-куба (и  $\delta \rightarrow 0$ , когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Построение Келдыш может быть усилено [15]: для каждого  $n$  и для  $p$  такого, что  $2p+3 \leq n$ , существует отображение  $n$ -мерного куба на любой куб большей размерности, включая гильбертов параллелепипед, которое ациклично до размерности  $p$ . Это отображение также строится как предел вложений  $n$ -куба, удовлетворяющих условиям, которые соответственно обобщают условия Л.Вс. По существу это уточненный в применении к большим размерностям аналог пеановского построения. Деформацией образа это отображение может быть превращено по методу Л.Вс. в монотонно открытое. Условие на границу ацикличности, в общем случае, нельзя улучшить. Это следует из работы Р.Л. Фрум-Кеткова [16], ученика Л.Вс., который доказал, что при отображении трехмерного куба повышающего размерность, необходимо существуют зацепленные прообразы точек.

### **Семинар по геометрической топологии**

В конце 50-х – начале 60-х годов интерес топологов стал постепенно перемещаться от задач алгебраической топологии с ее основным понятием гомотопического типа к изучению собственно топологической структуры, прежде всего многообразий. Вначале речь шла о дифференцируемых и кусочно линейных структурах. Они важны для приложений, а с другой стороны для их изучения имеется технический аппарат гладких и симплексиальных отображений. Но чисто топологическая структура имеет фундаментальное значение, и ее изучение постепенно, по мере появления соответствующей техники, стало выдвигаться на

первый план. Возник несколько неопределенный термин "геометрическая топология", принадлежащий М.Х.А. Ньюмену, выражавший эту направленность на изучение многообразий с точностью до гомеоморфизма в противовес гомотопическому типу алгебраической топологии. Дж. Милнор в число важнейших проблем геометрической топологии включил в 1963 году, кроме классических триангулируемости многообразий, основной гипотезы комбинаторных многообразий (Hauptvermutung) и гипотезы Пуанкаре в размерностях три и четыре, топологическую инвариантность рациональных классов Понtryгина и простого гомотопического типа, и так называемые гипотезу кольца и гипотезу о двойной надстройке. В настоящее время все они решены, но в то время это были центральные темы топологических исследований.

Л.В. направила внимание своего семинара на те стороны этих проблем, которые были доступны близким ей методам, и идеи, внесенные в геометрическую топологию участниками семинара Л.Вс. Келдыш, имели критическое значение для решения некоторых из этих проблем. Она отдавала своему семинару всю свою энергию, тщательно проверяла работы своих учеников, оказывала им разнообразную поддержку. (Подробнее см. [17].)

Работа самой Л.В. в этот период была связана так или иначе с понятием *псевдоизотопии*<sup>4</sup>. В своих последних статьях она развила подход к изучению топологических вложений через построение псевдоизотопий, которые переводят стандартные вложения в данные [18].

М.А. Штанько удачно обратил эту идею [19], введя понятие *размерности вложения*, как минимальной размерности полиэдра, на который можно псевдоизотопно перевести малым сдвигом данный компакт. Это понятие оказалось одним из центральных в дальнейшем развитии геометрической топологии.

Работа семинара Людмилы Всеволодовны Келдыш прекратилась в 1974 году.

В конце 60-х годов события в политической жизни страны вторглись в нормальное течение научной жизни. П.С. Новиков и Л.Вс. Келдыш поддерживали диссидентов, таких, как А.С. Есенин-Вольпин. Это вело к конфликтам, которые значительно сократили жизнь двух замечательных людей. В 1973 году Л.Вс. ушла из Института Стеклова, протестуя против увольнения ее сотрудника, которое она считала несправедливым. Петр Сергеевич Новиков умер в 1974 году. В феврале 1976 Людмила Всеволодовна скончалась после тяжелой болезни. За две недели до смерти, только что вернувшись после операции, она пришла в Институт Стеклова на традиционную встречу с учениками.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Келдыш В.В. Семья Келдышей // В: "М.В. Келдыш. Творческий портрет по воспоминаниям современников". Москва. Наука. 2001, стр.121-132
- [2] Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях М: ГТИТЛ, 1953, 359 с. [Luzin N.N. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris (édition de Borel) (1930) 1-328]
- [3] Островский А.В. Отображения борелевских множеств. Труды МИАН. том 252 вып.1, М.: Наука, 2006. с.237-260
- [4] Келдыш Л.В. Структура В-множеств // Докл. АН СССР, 1941. 31, №7, с.651-653.

<sup>4</sup> Псевдоизотопия есть гомотопическая деформация  $g_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , многообразия, в которой  $g_t$  при  $t < 1$  гомеоморфизмы.

- [5] Келдыш Л.В. Структура В-множеств // Труды МИАН; т.17. М.:Наука, 1945. 76 с.  
[Structure of B-sets // Trudy MIAN (Proceedings of the Steklov Institute)]
- [6] Л. Келдыш. Нульмерные отображения, повышающие размерность // Матем. сб. 1951.Т. 28. №3. С. 537-566.
- [7] A. N. Kolmogoroff. Über offene Abbildungen // Ann. of Math. (2). 1937. V. 38. №1. P. 36-38.
- [8] Л.В. Келдыш. Нульмерные открытые отображения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959.Т. 23. №2. С. 165-184.
- [9] П. С. Александров, В. А. Пасынков. Введение в теорию размерности: Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [10] D. Wilson. Open mappings on manifolds and a counterexample to the Whyburn conjecture// Duke Math. J. 1973. V. 40. №3. P. 705-716.
- [11] J. J. Walsh. Monotone and open mappings on manifolds. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 209. P. 419-432.
- [12] R. D. Anderson. One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem // Ann.of Math. (2). 1958. V. 68. №1. P. 1-16.
- [13] Л.В. Келдыш. Пример монотонного неприводимого отображения трехмерного куба на четырехмерный // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. №6. С. 957-960.
- [14] Л.В. Келдыш. Преобразование монотонного неприводимого отображения в монотонно-открытое и монотонно-открытые отображения куба, повышающие размерность // Матем. сб. 1957. Т. 43. №2. С. 187-226.
- [15] А. В. Чернавский. Обобщение построения Л.В. Келдыш монотонного отображения куба на куб большей размерности // УМН. 1985. Т. 40. №4. С. 209-211.
- [16] Р. Л. Фрум-Кетков. О поведении циклов при непрерывных отображениях компактов // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115. №2. С. 249-252.
- [17] А.В. Чернавский. О работах Л.В. Келдыш и ее семинара // УМН. 2005. Т.60, № 4. С. 11-36.
- [18] Л.В. Келдыш. Топологические вложения в многообразие и псевдоизотопия // Матем. сб. 1966. Т. 71. №4. С. 433-453.
- [19] М. А. Штанько. Аппроксимация компактов в  $E^n$  в коразмерности, большей двух // Матем. сб. 1973. Т. 90. №4. С. 625-636.