ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА

А.В. Арутюнов

Рассмотрим систему нелинейных уравнений, имеющую в векторной записи вид $\mathbf{F}(x) = y$, где $\mathbf{F}$ – гладкое отображение одного банахова пространства X. в другое (для простоты можно считать эти пространства конечномерными). Если точка x_0 вырождена, то есть линейный оператор $\mathbf{F}'(x_0)$ не является сюръективным (например, $\mathbf{F}'(x_0) = 0$), то в точке x_0 классическая теорема об обратной функции неприменима. В докладе обсуждается это явление вырождения и предлагается вариант теоремы об обратной функции, который применим и в вырожденных точках.

Рассмотрим также классическую экстремальную задачу с ограничениями

$$f_0(x) \to \min, \qquad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad x \in X.$$

Здесь гладкие функции f_i задают ограничения, а f_0 – минимизируемый функционал. Пусть x_0 – точка локального минимума. Известно, что если точка x_0 вырождена (анормальна), то есть градиенты ограничений $f_i'(x_0)$ линейно зависимы, то классический принцип Лагранжа вырождается (не несет содержательной информации), а классические необходимые условия второго порядка не выполняются.

В докладе обсуждается это явление вырождения и излагается теория необходимых условий первого и второго порядков одинаково содержательная как для вырожденных, так и для невырожденных задач. Эти необходимые условия заключаются в неотрицательной определенности максимума из вторых производных функции Лагранжа, взятому по некоторому специально строящемуся множеству множителей Лагранжа. Это множество состоит из тех множителей Лагранжа, для которых индекс соответствующей квадратичной формы, определяемой функцией Лагранжа, не превышает порядка анормальности рассматриваемой точки. Оказывается, что для анормальных точек приводимые условия превращаются в классические условия второго порядка.

Указанные результаты являются развитием принципа Лагранжа и обобщаются на теорию оптимального управления. Устанавливается связь между необходимыми условиями оптимальности и теоремой об обратной функции.

Важно отметить, что все излагаемые в докладе результаты являются содержательными и в конечномерном случае (даже, если X трехмерное пространство).

Литература

1. А.В. Арутюнов. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. Москва: Изд-во "Факториал", 1997.
2. А.В. Арутюнов. Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки. Математический сборник. Т. 191, № 1, с. 3 – 26 (2000).
3. А.В. Арутюнов. Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления. Доклады Академии наук. Т.371, № 1, С.10 – 13 (2000).
4. А.В. Арутюнов. Принцип максимума Понтрягина и достаточные условия оптимальности для нелинейных задач. Дифференциальные уравнения, Т.39, №12, с.1587 – 1595 (2003).
5. А.В. Арутюнов. Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности анормальной точки. Математические заметки, Т.77, выпуск 4, с.483-497 (2005).
6. А.В. Арутюнов Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения. Математические заметки, Т. 84 , выпуск 2 , с.163—174, (2008).