Униформизация вырождающихся уравнений и квазиклассические асимптотики

$\hat{P} = P(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ – (П)ДО с малым пар-ом h на мн-зии $\underline{X}$

$\hat{P}u = \lambda u$ или $-ih\frac{\partial u}{\partial t} + \hat{P}u = 0$

$h \to 0$ асимптотические $\underline{\text{решения}}$.

Канонический оператор Маслова

Вырожденные? Особенности?

Униформизация

M – C^∞ мн-ие (гладкое)

G – комп. группа Ли

$(g, m) \mapsto g \cdot m$ – гладкое действие G на $\underline{M}$

$X = M/G$ – пр-во орбит

пр-во гладких ф-ий $C^\infty(X) := C^\infty(M)^G$

пр-во Соболева $H^s(X) := H^s(M)^G$

$L^2(X) := H^0(X)$

(далее M – риманово, инвариантная мет. снабжено инвариантной формой объема.

$\hat{\mathcal{P}} : C^\infty(M) \circlearrowleft$ – (П)ДО на $\underline{M}$.

$\hat{\mathcal{P}}$ G-инвариантен.

$\hat{P} = \hat{\mathcal{P}}|_{C^\infty(X)}$ – h-(П)ДО на $\underline{X}$.

Какие пр-ва X?

$X = M/G$ – стратифицированные мн-ия

G – компактные связные группы Ли

Пример $M = \mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$

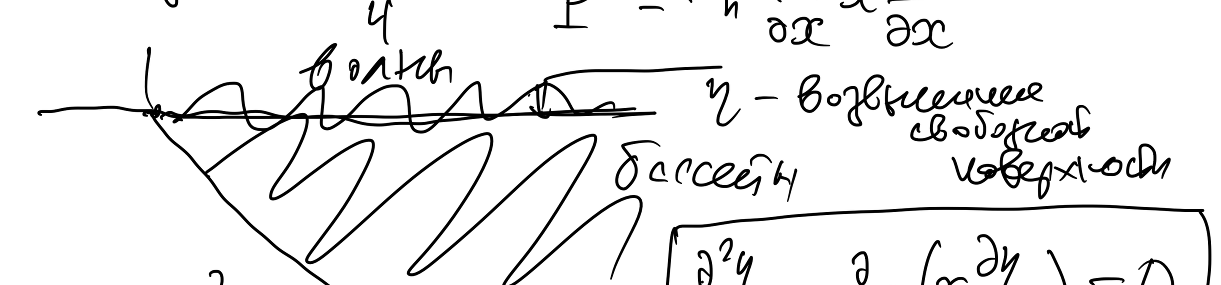
$G = S^1$ действ на M поворотами

$\varphi \mapsto$ поворот на угол φ

$X = M/G = \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \ni x$

$M \to X$ $\quad \mathcal{P} = -h^2\Delta = -h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)$

$y \mapsto \frac{y_1^2 + y_2^2}{4}$ $\quad P = -h^2\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x}$



$$\boxed{\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0}$$

M
$\downarrow G$
X

Квазиклассические асимптотические ф-ии на $\underline{M}$, инв. отн. G

$\underline{\text{Как добиться } G\text{-инвариантности?}}$

"Reminder" – канонический оператор на $\underline{M}$ как "черный ящик"

Основные геометр. объекты

- $\Lambda \subset T^*M$ – лагранжево многообразие
- $d\mu$ – форма ~~объема~~ на $\underline{\Lambda}$ (мера)

Выш условие квантования:

$\omega^1 = p\,dq$ $\quad \frac{2}{\pi h}[\omega^1] + \text{ind} \equiv 0 \mod 4$ (Б-З-М)

$K = K_{(\Lambda, d\mu)} : C_0^\infty(\Lambda) \longrightarrow C_h^\infty(M)$ $\quad h \in (0,1]$, $h \to 0$

$\hat{H}(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$

$H(x,p) = H_0 + hH_1 + \ldots$

$\underline{\text{Формулы коммутации}}$

1) $\hat{H}KA = K(H_0|_\Lambda A) + O(h)$

если $H_0|_\Lambda = 0$ и $\mathcal{L}_{V(H_0)}(d\mu) = 0$

2) $\hat{H}KA = -ihK(\Pi A) + O(h^2)$

Оператор переноса $\Pi = V(H) + iH_{sub}|_\Lambda$

$H_{sub} = H_1 + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_j}(x,p)$

$\boxed{\text{Когда } KA \text{ инвариантно отн. действия группы } G\text{?}}$

$u = KA$ $\quad$ g - ~~инвариантна~~

$\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G

$\xi \in \mathfrak{g} \mapsto v_\xi \in \text{Vect}\,M$

$\boxed{v_\xi(u) = 0 \quad \forall\, \xi \in \mathfrak{g}}$

$\hat{H}_\xi = -ihv_\xi$ $\quad H_\xi(x,p) = \omega^1(v_\xi)$ $\quad$ Λ – G-инв.

1) $\hat{H}_\xi KA = 0 \mod O(h)$

$H_\xi(x,p)|_\Lambda = 0 \Rightarrow V(H_\xi)$ касательно к $\underline{\Lambda}$

2) $\hat{H}_\xi KA = 0 \mod O(h^2)$

A – постоянна на G-орбитах на $\underline{\Lambda}$

$\underline{\text{Отображение моментов}}$

$\pi : T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$

$\pi(x,p)(\xi) = H_\xi(x,p)$

$G : W$

$\pi : W \longrightarrow \mathfrak{g}^*$

0 – слабо рег. зн.

$\pi^{-1}(0)/G = W//G$

$\tilde{\Phi} \subset \pi^{-1}(0) \subset T^*M$

$\underline{\text{мн-во всех рег. точек}}$

$\tilde{\Phi}/G = \Phi$ – симплектическое пр-во (редуцир. пр-во $\tilde{\Phi}$)

$\Lambda \subset \tilde{\Phi} \subset \pi^{-1}(0) \overset{j}{\subset} W_{\omega^2}$ $\quad (= T^*M \setminus \{\text{особые точки}\})$

лагранжево

$\downarrow p$

$L \subset \Phi$ $\quad \exists!\, \tilde{\omega}^2 : p^*(\tilde{\omega}^2) = j^*(\omega^2)$

$K_{(\Lambda, d\mu)} \rightsquigarrow K_{(L, d\tilde{\mu})}$ $\quad \underset{\text{буде}}{d\tilde{\mu}} \otimes \underset{\text{слоб (инв. мера)}}{dh} = \underline{d\mu}$

У.К. $\quad \frac{2}{\pi h}[p\,dq] + \text{ind} \equiv 0 \mod 4$ (на Λ)

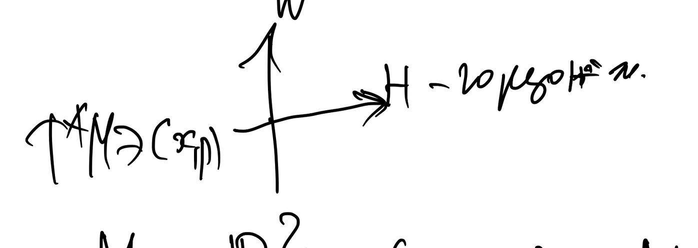
$\omega^1 = p\,dq$ $\quad \omega^1 = 0$ на кас. пр. к орбитам

$\Longrightarrow$ корр. определенная форма на L

$M = \mathbb{R}^{2n}$ $\quad \Lambda \longrightarrow \Lambda(n) \approx U(n)/O(n) \xrightarrow{\det^2} S^1$, $\quad j$

$\text{ind} = j^*\left(\frac{[d\varphi]}{2\pi}\right)$

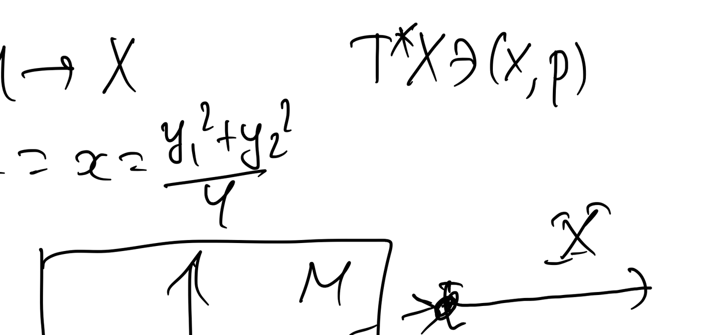
Констр. ст. Уравне j, когда $M \neq \mathbb{R}^{2n}$



$M = \mathbb{R}^2 \ni (y_1, y_2)$ $\quad M \to X$ $\quad T^*X \ni (x, p)$

$X = \bar{\mathbb{R}}_+ \ni x$ $\quad y \mapsto x = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4}$

$T^*M \ni (y, \xi)$



$p_\varphi = y_1\xi_2 - y_2\xi_1$

$p_\varphi^{-1}(0)$

$y_1\xi_2 - y_2\xi_1 = 0$ $\quad (p_\varphi^{-1}(0) \setminus \{0,0\}) = \tilde{\Phi}$

$dp_\varphi = 0 \Rightarrow$ особые точки $\quad n(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

$y = \xi = 0$

$\tilde{\Phi}$: $\quad y = \eta \cdot n(\varphi)$ $\quad \eta^2 + \rho^2 > 0$

$\xi = \rho \cdot n(\varphi)$

$\varphi \mapsto \varphi + \pi$ $\quad \rho > 0$, $\eta \in (-1, 1)$

$\eta \mapsto -\eta$

$\xi \mapsto -\xi$ $\quad \Phi : (\eta, \rho)$

$L \subset \Phi \cancel{\cong} T^*X$ $\quad \omega^1 = \xi\,dy = \rho\,d\eta$

$\omega^2 = d\xi \wedge dy = d\rho \wedge d\eta$

$$\begin{cases} \Psi(\eta, \theta) \text{ – произв. ф-я} \\ C_\Psi = \{(\eta, \theta) \mid \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0\} \\ L = \{(\eta, \rho) \mid \rho = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta},\ (\eta, \theta) \in C_\Psi\} \end{cases}$$

$\langle y, n(\varphi) \rangle = y_1\cos\varphi + y_2\sin\varphi$

$S(\theta, \varphi) = \Psi(\langle y, n(\varphi) \rangle, \theta)$

$KA(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{(m+1)/2} \iint e^{\frac{i}{h}\Psi(\langle y, n(\varphi) \rangle, \theta)} (A\sqrt{F})(\langle y, n(\varphi) \rangle, \theta)\, d\varphi\, d\theta$

$m = \dim\theta$ $\quad x = \frac{y^2}{4}$

$\int e^{\frac{i}{h}\Psi(\langle y, n(\varphi) \rangle)} a(\langle y, n(\varphi) \rangle)\, d\varphi$

Выражение через $J_0\left(\frac{|y|}{h}\right)$, $J_1\left(\frac{|y|}{h}\right)$

С.Ю. Доброхотов, А.Ю. Аникин, А.А. Толченников ... А.В. Цветкова

$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$

η, u